M^r. LE CH^{er} DE FLEURIEU.

# ACTA
# ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVIII.

## PARS PRIOR.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXX.

# TABLE.

## HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

### MDCCLXXVIII. Janvier — Juin.

### GÉOGRAPHIE

*Prospectus d'une Description générale topographique & physique de l'Empire de Russie, projettée par l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg* - - - - Page 3.

EXTRAIT *d'une Lettre de Mr.* Hahn *Sur-Intendant des Mines écrite à Mr. le Professeur* Pallas 38.

### ANATOMIE

*Notice touchant un monstre biforme, dont les deux corps sont réunis par derriere* - - 41.

### MÉTÉOROLOGIE

*Observation d'une Aurore Australe* - - 45.

*Hyver de 1777 à 1778* - - - - 46.

*Etat du Barometre pour chaque mois des années* 1772 —— 1777 - - - Pag. 50.

*Etat du Thermometre pour chaque mois des années* 1772 —— 1777 - - - - 55.

*Etat de l'Athmosphere pour chaque mois des années* 1772 —— 1777 - - - - 61.

MORTS - - - - - - 66.

OUVRAGES, *Machines & Inventions présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier sémestre de l'Année* 1778 - 67.

---

## ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVIII. Pars prior.

cum tabulis XIII. aeri incisis.

MATHEMATICA Pag.

LEONH. EVLER. *De corporibus regularibus per doctrinam sphaericam determinatis; ubi simul noua methodus, globos siue coelestes siue terrestres charta obducendi, traditur* - - 3.

—— —— *Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris* de la Grange *vsus est in integranda aequatione differentiali* $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ - 20.

ANDR.

ANDR. LEXELL. *De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyberbolae* - - - - - Pag. 58.

LEONH. EVLER. *De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum* - - - - - - 102.


## PHYSICO-MATHEMATICA


LEONH. EVLER. *Determinatio onerum, quae columnae gestare valent* - - - - 121.

—— —— *Examen insignis paradoxi in theoria columnarum occurrentis* - - - 146.

—— —— *De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium* - - - 163.

NICOL. FVSS. *Varia problemata circa statum aequilibrii trabium compactilium oneratarum, earumque vires et pressionem contra anterides* - - - - - - 194.


## PHYSICA


I. T. KOELREVTER. *Lycia hybrida* - - 219.

I. G. GEORGI. *De conferuae natura, disquisitio chemica* - - - - - - 225.

C. F. WOLF. *Descriptio vesiculae felleae tigridis, eiusque cum leonina et humana comparatio* - 234.

IOANN. LEPECHIN. *Tres oniscorum species descriptae* - - - - - - Pag. 247.

A. I. GÜLDENSTAEDT. *Antilopes subgutturosae descriptio* - - - - - - 251.

—— —— *Antilopes subgutturosae anatomia* - - 263.

## ASTRONOMICA

J. ANDRÉ MALLET. *Observations astronomiques faites à Genève* - - - - 277.

LEONH. EULER. *Réflexions sur les inégalités dans le mouvement de la Terre causées par l'action de Venus: avec une Table des corrections du Lieu de la Terre* - - - 297.

LEONH. EVLER. *Investigatio perturbationum, quae in motu terrae ab actione Veneris producuntur: cum tabula perturbationum istarum* 308.

ANDR. LEXELL. *Vlteriores disquisitiones de tempore periodico cometae anno 1770 observati* 317.

ANDR. LEXELL. *Supplementum ad dissertationes novis commentariis insertas, de eclipsibus solaribus annis 1769 et 1773 observatis, ut et occultationibus fixarum a Luna* - - 353.

---

# HISTOIRE
DE
# L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
# SCIENCES.

# HISTOIRE
## DE L'ACADÉMIE.

### MDCCLXXVIII.
Janvier —— Juin.

## GÉOGRAPHIE.

### Prospectus d'une Description générale topographique & physique de l'Empire de Russie, projetée par l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. (*)

Le Comité nommé par S. E. Mr. le Directeur de l'Académie, pour composer une Géographie topographique et physique de la Russie a debuté par la publication d'un Prospectus détaillé, qui se partage en cinq parties principales.



(*) Traduit du Russe.

La I^re^ s'occupe de la Géographie générale de l'Empire:
la II^de^ en donne une Histoire générale:
la III^me^ en comprend l'État politique:
la IV^me^ la Géographie particuliere, & enfin
la V^me^ une description physique du même Empire.

## Premiere Partie principale,

c'est à dire

## Géographie générale de l'Empire.

Elle se divise en huit Sections.

### *Section premiere.*

Limites de l'Empire.

1) Du côté de l'Europe, l'Océan septentrional & les deux golfes qu'il forme, la mer blanche & la mer baltique, la Suede, la Pologne, & la Turquie européenne.

2) En Asie vers le Midi, la mer noire & celle d'Asov, la Crimée indépendante, le Caucase, la mer Caspiene, le désert des Kirgises borné par le Gouvernement d'Orenbourg, la Mongolie & la Daurie, qui dépendent de la Chine.

3) vers l'Orient la partie septentrionale de l'Océan oriental, le détroit entre l'Asie & l'Amérique, & enfin

4) vers le Nord, tout l'Océan septentrional, ou la mer glaciale.

*Section*

## *Section seconde.*

Position de l'Empire sur le globe.

Son étendue par climats & degrés: sa dimension en verstes quarrées d'après le calcul le plus juste auquel on puisse aprocher.

## *Section troisieme.*

Orographie générale de l'Empire· c'est à dire, Description de ses montagnes, se bornant à leur situation, pente, distribution, correspondance, & hauteur proportionée, sans avoir égard à leur exploitation.

1) le Caucase en général, particulierement cette partie qui en est située en Russie, & ses sommets du côté du nord.

2) les monts Krapacs ou Carpathes & leurs bras, qui se repandent jusques dans la Russie.

3) Cette bosse ou ce plateau élevé dans l'intérieur de la Russie européenne, connu des anciens Géographes sous le nom de *Mons alaunus*, dans lequel les couches horizontales de diverses montagnes semblent se réunir, & qui renferme les sources des principaux fleuves de cette partie de l'Empire.

4) les monts septentrionaux situés entre la mer baltique & la mer blanche, n'étant qu'une continuation de la chaine des montagnes de la Scandinavie.

5) les montagnes ouraliques, qui commencent près de la mer blanche & des îles de Nova-zemlia, & leurs branches qui se deployent vers le midi.

6) Les montagnes qui forment la frontiere entre la Sibérie & les autres contrées de l'Asie, & qui sont une branche du grand sisteme des Alpes de l'Asie, laquelle en s'étendant depuis l'Irtiche jusqu'à l'océan oriental, prend des noms divers comme ceux d'Altai, Telezkoi, Sayanskoi & Stanovoi Chrêbet, & appartient par sa pente septentrionale seulement à l'Empire russe. Entre les branches secondaires de cette chaine de montagnes limitrophes la plus remarquable sera celle, qui revient vers le Nord-Est en traversant le cours du Lena & du Yenisei, & qui fournit les eaux aux rivieres qui vont se décharger entre celles-là dans la mer glaciale.

## *Section quatrieme.*

### Limites fixes & immuables entre l'Asie & l'Europe dans l'intérieur de la Russie.

Après avoir remarqué les limites, que les Géographes en divers tems se sont avisés d'y mettre arbitrairement, on s'étendra sur celles, que la nature y forme elle même. Ce sont les montagnes ouraliques, qui séparent, comme l'on sait, la Sibérie d'avec la Russie; puis cette grande suite de montagnes en couches horizontales, laquelle en commençant de la riviere Bielaya porte entre Casan & Orenbourg le nom d'Oural, & continue entre les rivieres de Samara & d'Oural sous le nom d'Obtschei Sirt, d'où part cette hauteur continue de pays, qui s'étend par les déserts des Calmouques & du Couma, va s'aprocher de la mer d'Asov, & sépare de l'Europe les déserts salés, qui avoisinent la mer Caspiene. C'est par

par conséquent à cette mer, réputée depuis long tems ensemble avec la mer noire, comme servant de limites entre l'Europe méridionale & l'Asie mineure, que la nature a fixé des bornes immuables, moyennant lesquelles les différentes provinces attribuées tantôt à l'une tantôt à l'autre partie du monde, restent attachées chacune à la sienne: du moins le circuit de l'Europe en est une fois pour toutes déterminé au juste.

*Section cinquieme.*

Description générale des mers sur lesquelles la Russie domine & des îles qu'elles forment: leur situation générale, étendue, golfes principaux, propriétés, flux & reflux, avec un simple indice des fleuves, qui s'y jettent immédiatement.

Ces mers sont:
la Caspiene.
la noire & celle d'Asov.
une partie de la mer baltique.
la mer blanche.
la mer glaciale.
la mer qu'on trouve entre la partie de Nord-Est de l'Asie & de l'Amérique: enfin les îles situées dans chacune des dites mers appartenantes à la Russie.

*Section sixieme.*

Description des principaux fleuves suivant leurs sources dans les montagnes marquées ci-dessus, leur cours & écoulement dans les mers mentionnées, qualité & raport entre

entre eux: puis les lacs qu'ils parcourent, ou auxquels ils communiquent. Comme la description suivant la source des fleuves semble être de beaucoup préférable, viennent à detailler:

1) Les eaux qui découlent du grand plateau élévé au milieu de la Russie & des monts septentrionaux, qui s'y joignent de près.

a) la Dwina qui porte ses eaux dans la mer blanche, & les principales rivieres qui s'y mêlent.

b) les grands réservoirs d'eaux, comme les lacs d'Onega, de Ladoga, de Plescou & de Peipus. & les rivieres de la Neva & de la Narova qui en sortent, & se jettent dans le golfe de Finlande.

c) la Duna qui mêle ses eaux à la mer baltique.

d) le Dnepr qui se décharge dans la mer noire.

e) le Don ayant son écoulement dans celle d'Asov.

f) la Wolga qui va se jetter dans la mer Caspiene, & les rivieres qu'elle reçoit dans son lit du côté du Sud.

2) Les fleuves qui se réunissent du côté occidental des montagnes ouraliques.

a) la Petschora qui mene tous les ruisseaux de la partie septentrionale des monts ouraliques dans la mer glaciale.

b) la Kama qui se jette elle même dans la Wolga, & y fait décharger moyennant la Bielaya toutes les autres rivieres de moindre grandeur, qui sortent de l'ouest des monts ouraliques.

3) les

3) les Rivieres qui ſortent à l'Eſt des dites montagnes.

a) l'Oural qui prend ſa direction vers l'Oueſt de ces montagnes & ſe décharge dans la mer Caſpiene.

b) les rivieres qui ont leur ſource dans une grande partie de ces montagnes, & qui mêlent leurs eaux avec celles du Tobol.

c) les petites rivieres qui ſourdent au Nord des montagnes d'Oural, & vont directement ſe décharger dans l'Obi & dans la mer glaciale.

4) les Fleuves, qui deſcendent de ces grandes montagnes, qui ſont la barriere de la Sibérie, & leurs branches vers la mer glaciale.

a) l'Irtiche & l'Obi.

b) le Taſſe.

c) le Yeniſei & les rivieres conſidérables qui s'y rendent du côté de l'orient, les trois Toungousks, & le lac Baical avec ſes rivieres.

d) les petites rivieres entre le Yeniſei & la Lena, qui viennent du Nord de la Toungouska inférieure, & entrent enfin dans la mer glaciale.

e) la Lena & les bras dans les quels elle ſe partage.

f) les rivieres de la Sibérie ſeptentrionale, la Jana, la Chrona, l'Indigirka, Alaſéia & Kowina.

5) le Fleuves découlants de la partie orientale des monts Sibériens, lesquels ſe réuniſſent à l'océan oriental:

 a) l'A-

a) l'Anadyr:

b) les fleuves du Kamtſchatka.

c) les petites rivieres & les torrents, qui venants des montagnes le long des côtes tombent dans la mer d'Ochotzk, dont le principal eſt nommé Oud.

d) l'Amur, & ſeparément les rivieres qu'il réunit, & qui traverſent la Daurie ruſſienne.

6) C'eſt ici où l'on pourra détailler le voiſinage des rivieres dans tout l'Empire, & la Communication par eau qui en dépend, tant par des canaux que par de courts trajets, qui ſe font par terre.

## *Section ſeptieme.*

### Topographie générale de la Ruſſie.

1) de la Ruſſie en général.

a) la conſtitution naturelle, ou les propriétés de cette grande plaine ſelon ſes différentes parties, ſes plateaux élevés & ſes vallées, ſes forêts, déſerts, marais, régions fertiles ou ſteriles, & les autres variétés du ſol, qui s'étendent ſur plus d'un ſeul gouvernement.

b) les différents climats dans la Ruſſie ſeptentrionale tempérée, & dans la méridionale, ſuivant des obſervations météorologiques: la culture des pays.

2) de la Sibérie en général.

a) Sa poſition conſidérée généralement; puis ſa pente depuis les monts ourals vers les Limans ou lacs marécageux de l'Obi, & celle depuis la grande

grande montagne frontiere vers la mer glaciale; sa région vers le Nord-Est élevée & hérissée de montagnes, celle vers le Sud qui est fertile, celle vers le Nord toute couverte de forêts, & enfin la plus voisine du pole, marécageuse & sterile, ainsi que les différentes variétés du sol.

*b*) Le climat rude de la Sibérie, & les raisons qu'on en donne, eu égard à sa situation, à ses montagnes, & à d'autres circonstances: les contrées qui sont cultivées, & à quel point la culture y a été poussée, & lesquelles n'en sont point du tout susceptibles.

3) des grands chemins dans l'Empire, de ceux de traverse, qui sont nécessaires & fréquentés à l'ordinaire, comme aussi de ceux de communication avec les pays limitrophes.

*Section huitieme.*

Spécification & Critique raisonnée des cartes géographiques tant terrestres que marines, qui regardent l'Empire.

## Seconde Partie Principale.

### Qui comprend l'histoire générale de l'Empire de la Russie & se divise en deux Sections.

*Section premiere.*

Points principaux de l'histoire générale de la Russie.

*a*) Histoire ancienne de la Russie, ses anciens habi-

 tans,

tans, & les peuples qui s'y sont établis, ou y ont fait des passages.

b) Histoire moyenne, qui regarde la Russie divisée en plusieurs principautés, leur sort, séparation & réunion: On pourra traiter en même tems de l'ancienne division en Russie grande & petite, & en Russie blanche & rouge.

c) l'Histoire moderne eu égard sur tout à ses nouvelles conquêtes, & aux païs nouvellement découverts.

### *Section seconde.*

Histoire particuliere des nations sujettes à la Russie.

a) Spécification des nations.

b) Description détaillée de chaque nation suivant leurs tiges différentes, l'histoire de leur soumission, puis leurs habitations, leur nombre, religion, maniere de vivre, moeurs & usages, enfin leurs habillemens, économie, langue, arts & métiers.

La description & la division des nations selon les quinze tiges ou races principales, paroissent préférables.

Les voiçi:

## I. Nations esclavones.

a) Russes par toute l'étendue de l'Empire.

b) Polonois dans les Gouvernements de Polotzk & de Mohilow.

II.

## II. Nations allemandes.

a) Allemands en Esthonie & en Livonie.

b) Suédois dans la Finlande russe.

## III. Nations lettonienes.

a) Lettoniens proprement dits en Livonie, & dans la Livonie auparavant nommée polonoise.

b) Lithuaniens dans les Gouvernements de Polotzk & de Mohilow.

## IV. Nations finlandoises.

a) Finlandois proprement dits dans les Gouvernements de Wibourg & de St. Pétersbourg.

b) Esthoniens dans le Gouvernement de Reval, & dans une partie de celui de Livonie.

c) Les Lives dans le Cercle de Riga près de Salis.

Nations qui descendent, à juger par la langue qu'elles parlent, des Finlandois.

d) Lapons dans le Cercle de Kola.

e) Permiens dans la Province de Permie située dans le Gouvernement de Casan & dans les régions septentrionales de l'Obi.

f) Sirianiens dans le Cercle de Iarensk.

g) Wotiakes dans les Gouvernements de Casan & d'Orenbourg.

h) Tscheremisses dans les Gouvernements de Casan, de Nischnei-Novogorod, & d'Orenbourg.

i) Tschouvasses.

*k*) Teptéres dans la Baschkierie mêlés de Tschouvasses, de Tscheremisses & de Wotiakes.

*l*) Mordouanes & ceux qui en descendent, les Moschkans, et les Ersans dans les Gouvernements de Nischnei-Novogorod, de Casan et d'Orenbourg.

*m*) Woguls aux deux côtés des monts ourals.

*n*) Ostiakes sur l'Obi jusqu'à Narim & Surgoutsch dans le Cercle de Beresow.

## V. Nations Tatares.

1) Tatares proprement dits.

*a*) Ceux de Casan dans le Cercle du même nom, des quels descendent 1) les Tatares dans le Cercle de Woronése, dans la Ville de Kasimov & ses environs, 2) ceux dans le Gouvernement d'Orenbourg près de la Sakmara, 3) ceux à Kargal 4) ceux à Uffa, 5) les Itschiens près de la riviere d'Itsch, dans la Province d'Iset, 6) les Tschatzkiens à Tomsk & aux environs.

*b*) Ceux de Tobolsk aux deux rives du Tobol, depuis la frontiere des Kirguises jusqu'à l'embouchure du Tobol.

*c*) Ceux de Tomsk aux deux bords du Tom, depuis la montagne de Kousnezk jusqu'à l'embouchure du Tom.

*d*) Melesses dans le Cercle de Tomsk.

*e*) Tuliberdiens à la rive droite du Tom au dessus de Kousnezk.

*f*) Abinzes en rémontant le Tom, sur les montagnes & les rivieres de Kondoma & de Mrasa.

*g*)

g) Ceux d'Obi sur la riviere de ce nom, depuis l'embouchure du Tom jusqu'au dessus de Narim.

h) Barabinzes entre l'Irtiche & l'Obi dans le désert Barabinzien.

i) Turinskes au bord de la Tura depuis les frontieres des Wogals jusqu'à l'embouchure de la Tura.

k) Aiales à l'embouchure de la Tara.

l) Katschinzes au bord occidental du Yenisei entre les rivieres de Jusset & d'Abakan.

m) Tschulimes sur la riviere de Tschulima, lesquels se sont partagés en trois branches.

n) Udinskiens entre les montagnes près de Grenskoi-Ostrog.

o) Kaschiens.

p) Yarenskes & leurs différentes branches sur l'Abakan, le Kysir, le Teff & la Yurba.

q) Biriousses & leurs trois branches autour du Taschtip.

r) Kobinzes sur le Taschtip, le Taia, & l'Abakan.

s) Beltires sur l'Abakan.

t) Sagayes le long de l'Aschkisch, de Basa, de Sur, & dans le désert sur l'Abakan.

2) Mankates ou Nogaiens au bord de l'Agtuba depuis Tschigit jusqu'à la mer Caspiene.

3) Mestscheräques dans le Gouvernement d'Orenbourg.

4) Baschkires dans le Gouvernement d'Orenbourg & dans la Province de Permie.

5)

5) Kirguises de la horde moyenne, & de la petite dans le désert des Kirguises.

6) Jakoutes sur la Lena & au bord oriental de ce fleuve.

7) Teléoutes sur le Tom depuis les hautes montagnes jusqu'à Kousnezk.

8) Télesses au bord du lac d'Oltan.

9) Les habitans du Caucase, dont une partie est d'origine tatare, & dont l'autre ne porte que le nom de Tatares.

a) Trouchménes à l'embouchure du Kouma.

b) Ossettes dans le milieu du Caucase.

c) Tschitschenges dans la partie orientale de la grande Kabardie.

d) Kustengues ou Kisténes en Kistézie sur la Sunsha.

e) Koumukes sur la Sunsha inférieure & le Téreck.

## VI. Nations Samoyedes.

1) Samoyedes proprement dits dans la partie la plus septentrionale de la Russie sur la Lena.

a) Européens, c'est à dire ceux qui habitent les cercles de Mesen, de Kanan, & de Yugorie.

b) Sibériens.

1) Tasiens sur le Tas entre l'Obi & le Yenisei.

2) Mangaséens sur le Tourachan & autour de la Ville de Mangaséa.

2) Nations qui descendent de Samoyedes:

a) Morases ou Ostiakes de Narim en rémontant le

Sur-

Surgut, sur le bord de l'Obi jusqu'à Narim, & à l'embouchure des rivieres Ketta & Tom.

b) Kaimaches dans le district de Krasnoiarsk à la source des rivieres de la Kana & de la Mana.

c) Ostiakes du Yenisei dans le district de Krasnoiarsk.

d) Kustimes sur la rive gauche du Tom.

e) Yourales entre l'Obi & le Yenisei, sur le bord de celui-ci, & en dedans du païs.

f) Kotovces sur la Kana.

g) Kaibales sur le Yenisei.

h) Karagasses dans le territoire d'Udinsk.

i) Moutores sur le Yenisei, l'Obi & Touba.

k) Ossanes dans le district de Yenisei, sur l'Usfolka.

l) Saiotes au pied des Montagnes Saianes, & au bord oriental du Yenisei au delà de l'Ussa.

VII. Nations Mongales.

a) Mongales proprement dits dans le cercle de Sélenguinski.

b) Derbétes, c) Torgautes, d) Siongores } sur le Wolga.

e) Bourates dans les Gouvernements d'Irkutzki & de Tobolski.

VIII. Toungouses & leurs différentes branches, depuis le Yenisei jusqu'à l'Océan oriental, & depuis le Golfe de Penfinski jusqu'aux frontieres de la Chine.

IX. Kamtschadales dans la partie méridionale du Kamtschatka.

X. Koryäkes dans la partie ſeptentrionale du Kamtſchatka, aux environs du Golfe de Penſinski, ſur l'Océan oriental presque jusqu'à l'Anadyr.

XI. Kouriles dans le Kamtſchatka méridional, & dans les îles Kouriles entre le Kamtſchatka & le Japon.

XII. Aléoutes dans les îles qu'on a nouvellement découvertes dans le detroit qui ſépare l'Aſie de l'Amérique.

XIII. Arinces dans le diſtrict de Krasnoiarsk.

XIV. Youkaguires près de la mer glaciale jusqu'à la ſource de l'Anadyr.

XV. Tſchouktſches dans la partie de Nord-Eſt de la Sibérie.

## Colonies de peuples voiſins.

1) Tatares.
   a) Bouckhares dans la Province d'Uffa & à Tobolsk.
   b) Chivinces.
   c) Taſchkentiens. } dans les Gouvernements d'Orenbourg, de Caſan, & d'Aſtracan.
   d) Turkeſtaniens. }
2) Perſans dans le Gouvernement d'Aſtracan.
3) Indiens à Aſtracan.
4) Finlandois près de Waldai.
5) Polonois ſur l'Irtiche, & dans le diſtrict de Sélenguinski.
6) Allemands dans les Gouvernements de Pétersbourg & d'Aſtracan.

7)

7) Grecs à Néshin.
8) Serviens dans la Nouvelle Russie.
9) Moldaves & Valaques dans la forteresse de St. Dmitrii.

# Troisieme Partie principale.
ou
# Description générale politique de l'Empire.

## *Section premiere.*

### Du Gouvernement.

1) De la souveraine Puissance, ses droits, titres & armes: de la Cour, des Ordres de Chevalerie, & de la classification des Rangs.
2) De la forme du Gouvernement, du Sénat, des Colleges de l'Empire, & des Loix.
3) De la forme des Magistrats particuliers dans les différentes provinces de l'Empire.

## *Section seconde.*

### De l'État militaire.

1) Des forces de terre, & de leur direction.
2) Des forces navales, de l'Amirauté & du département de l'Intendance, comme aussi des forêts, qui fournissent le bois pour la construction des vaisseaux &c.

### *Section troisieme.*

De la Religion dominante
& de celles qui sont tolérées: du Clergé

1) Du Synode, & d'autres états ecclésiastiques.
2) Des Couvents & du nombre de leurs habitans, de leur entretien, & reglement.
3) Du nombre des Prêtres, & des desservants d'Eglise.
4) Des Religions tolérées, & de leur reglement ecclésiastique, sur tout de celles des peuples en Asie.

### *Section quatrieme.*

Du Magistrat civil, & de sa forme.

1) Chambres de justice: la Police.
2) Etablissements d'éducation.
3) Histoire des Beaux arts & des Sciences.

### *Section cinquieme.*

De la Population de l'Empire.

1) Supputation comparative du nombre des habitants & du terrein d'une province à l'autre.
2) Différents ordres du peuple, leur droits, immunités & charges ou impôts: le nombre que chaque ordre renferme, & leur rélation entr'eux dans les diverses provinces de l'Empire.

### *Section sixieme.*

Raisonnement sur le raport actuel des occupations économiques.

Des membres de l'Etat qui consument, & de ceux qui produisent: de gens à capitaux, d'officiers publics, de do-

domestiques, de marchands & de merciers, de malades & de mendiants, considérés comme des membres de l'Etat qui ne font que consumer. De ceux qui s'occupent à la chasse, à la pêche, ou à l'entretien du bétail, qui labourent la terre, ou travaillent aux mines, de ceux qui exercent les arts mechaniques & les métiers, de ceux qui sont emploiés dans les fabriques & dans les manufactures, regardés comme des membres de l'Etat, qui produisent.

### *Section septieme.*

### Détail des richesses naturelles, & des prérogatives de l'Empire.

Des climats, de l'étendue des terres labourées calculée par Dessâtines; des fruits de la campagne qui servent à la nourriture; du lin, du chanvre, du coton avec le détail de leur produit annuel, & le raisonnement sur leur proportion: des terres incultes tant de celles qui sont labourables, que de celles qui sont tout à fait ingrates; des contrées riches en bois, à quoi l'on joindra des observations forestieres générales, & un calcul par raport au gain: du bois de charpente, & du bois à bruler, des nattes, du goudron, de la térébentine & de la soude: des différents paturages, dés vignes & des avantages qu'on pourra tirer de leur culture, des plantes sauvages qui font un objet du commerce; de la distillation de l'eau de vie, de la brasserie de la biere, du vinaigre & de l'hydromel; du raport économique de l'entretien des abeilles, des vers à soie; des bêtes à cornes, & des autres animaux domestiques, de la nourriture de la volaille; de la chasse & de la pêche; enfin des revenus qu'on retire du salpetre, du

fouffre, de la poudre à canon, du vitriol, de l'alun, du fel, des briques, de la chaux, du plâtre, des meules, des pierres à aiguifer, des pierres de taille, & des métaux, comme auffi des minéraux qu'on a manqué de mettre à profit, & de l'ufage auquel on pourroit les employer.

*Section huitieme.*

Du Commerce.

1) Du Commerce intérieur; des poftes & des trajets en fe raportant aux obfervations précédentes fur les chemins, les paffages & les communications par eau, des voitures; des exemtions de péage, des befoins réciproques des places principales de l'Empire, des étapes, des foires & des marchés ordinaires; des poids & des mefures, de l'argent, où l'on fera l'hiftoire de monnoies ruffes & du monnoïage actuel, de la quantité des efpeces tant intérieures qu' étrangeres qui circulent, & de leur proportion à la fomme des marchandifes; de l'établiffement des banques & de la fomme en argent de banque, fuivie de la comparaifon des efpeces effectives à celles en papier; de l'intérêt de l'argent, & du crédit; du cours & du droit de change; du prix moyen des marchandifes &c.

2) du Commerce extérieur de l'Empire & de la commodité que les ports, la navigation & les traités de commerce y apportent; des différens Bureaux de la douane, de leur reglements & diftribution, du tarif & de la contrebande; de l'exportation annuel-

annuelle de marchandises cruës & de vivres, des frais d'exportation; de l'exportation de marchandises fabriquées & de leur impôt; de l'entrée de marchandises cruës & des droits qu'elles payent, de l'entrée de marchandises fabriquées & de leur péage; de la balance du commerce; du Commerce par la mer baltique & la mer blanche avec les autres Puissances de l'Europe; du Commerce par terre avec la Pologne, la Prusse & les villes de Dantzig, de Breslau & de Leipzig; du Commerce avec la Turquie par terre & par la mer noire; du Commerce entre la Perse & le Gouvernement d'Astracan, de celui entre la Boukharie, les Kirguises & le Gouvernement d'Orenbourg, puis de celui qui se fait entre la Chine, & la Sibérie, & enfin de celui entre Kamtschatka & l'Archipel oriental.

## Quatrieme Partie principale.

ou

## Géographie particuliere de l'Empire de Russie.

Elle ne contient qu'une seule section.

Division actuelle de l'Empire en ses Lieutenances & ses Gouvernements. Dénomination & désignation d'après certains noms généraux usités pour les districts.

Voici le plan qu'on s'est proposé de suivre dans la description des Lieutenances & des Gouvernements, qui seront l'objet des chapitres suivants:

1) Eten-

1) Etendue & frontieres de la Lieutenance ou du Gouvernement. Dimenſion en miles quarrées géographiques. Diviſion en Provinces, Diſtricts & Cercles &c.

2) Qualité ou condition générale: montagnes, plaines, forêts, marais, deſerts, ſols fertiles & ſteriles, où l'on détaillera en même temps plus amplement les principales montagnes & les plateaux.

3) Deſcription plus circonſtanciée qu'elle ne l'a été dans la partie générale, des mers frontieres, (s'il y en a,) de leurs propriétés, golfes, caps, îles &c.

4) Deſcription des eaux courantes, tant des fleuves qui traverſent les Lieutenances & les Gouvernements, que des rivieres moins grandes, & des ruiſſeaux conſidérables qui s'y mêlent.

5) Détail des lacs d'eau douce & d'eau ſalée, des ſources, des eaux minérales, des bains &c.

6) Dénombrement des villes, villages, bourgs & habitations: Le nombre d'habitants & leur diverſité par raport aux nations, & le nombre de chaque eſpece.

7) Précis de l'hiſtoire ancienne & moderne des Gouvernements; des peuples qui les ont habités ou traverſés, enfin des tombeaux & d'autres monuments qui nous ſont reſtés d'eux.

8) Productions de chaque Gouvernement en pierres, minéraux & métaux, celles des regnes végétal & animal. On n'en fera qu'un ſimple indice en renvoyant le lecteur à la partie phyſique.

9) Agri-

9) Agriculture, entretien du bétail, métiers, établissements, fabriques & manufactures; commerce particulier de chaque Gouvernement.

10) Jurisdiction ecclésiastique & séculiere, revenus &c.

11) Enfin selon l'ordre des Provinces ou Districts,

a) Leurs frontieres fixées.

b) Description des villes, forteresses, couvents, villages, fontes de mines, pêcheries, ports & autres habitations remarquables selon l'ordre géographique.

## Cinquieme Partie principale.

ou

## Description physique de l'Empire & de ses Productions.

partagée en deux livres.

## Livre premier.

### Minérographie & Minéralogie de la Russie & de la Sibérie enrichie des cartes nécessaires minérographiques.

### *Introduction.*

Nature générale & diversité des montagnes de la Russie.

### *Section premiere.*

Du Caucase.

1) Sa qualité en général, ses différentes especes de montagnes, & ses couches.

2) Les différentes mines qu'on y a decouvertes & d'autres minéraux utiles.

3) Ses sources d'eaux minérales, & l'usage qu'on en peut faire.

*Section seconde.*

La Chaine de montagnes continuées des monts Krapacs, les différentes roches qui les composent; minéraux utiles & autres objets remarquables.

*Section troisieme.*

Les montagnes septentrionales dans l'enceinte de la Russie.

1) Les diverses especes de roches dont elles sont composées, leur site ou position naturelle.

2) Les mines qu'on y a ouvertes, & les travaux d'exploitation qui s'y trouvent.

3) Carriéres de marbre & autres minéraux utiles, sources &c.

*Section quatrieme.*

La chaine des montagnes d'Oural.

1) Les diverses roches qui les composent, leur position, & autres objets qui méritent attention.

2) Les grandes montagnes en couches horizontales de nouvelle formation du côté du couchant & l'aboudance de mines de cuivre qu'on y trouve.

3) Les mines dans les montagnes à filons surtout du côté du levant de cette chaine, & tous les établissements métalliques, qui dépendent de Cathérinenbourg.

4) Car-

4) Carriéres de marbre & autres minéraux très utiles, salines, sources d'eaux minérales &c.

### *Section cinquieme.*

Les Couches dans le plat pays du Continent de la Russie.

1) Leur Position, les plateaux qu'elles forment, anciennes traces de la mer, & autres observations & remarques générales.

2) Les minéraux & les différentes sortes de pierres & de terres que ces couches contiennent.

3) Description du désert uni méridional, ses riches salines, ses lacs, & différentes especes de sel.

### *Section sixieme.*

La Chaine des montagnes Altaïques & toutes celles qui s'inclinent vers l'Obi & l'Irtiche.

1) Les différentes roches qui les composent, leur position & autres objets curieux.

2) Les riches mines & minieres altaïques.

3) Autres minéraux remarquables qui s'y trouvent.

### *Section septieme.*

Les plaines entre les chaines ouralique & altaïque.

1) Les monts dans les déserts d'Ischimsk, & des Kirguises.

2) Les métaux & les minéraux qu'on tire de ceux ci, & de ces plaines abondantes en couches.

3) Les lacs salés.

### *Section huitieme.*

Les montagnes qui bordent le Yenisei & s'étendent jusqu'au Kossogol.

1) Les diverses sortes de montagnes qui les composent, disposition intérieure, couches, objets mémorables.

2) Les minieres dans le district de Krasnoiarsk & autres filons métalliques sur le Yenisei.

3) Minéraux, lacs salés, sources.

### *Section neuvieme.*

Les contrées montagneuses au delà & autour du Baikal avec celles de Wercholénie.

1) Nature générale de ces contrées, & les différentes sortes de roches, dont elles sont formées.

2) Les mines de Nertschinsk.

3) Les filons métalliques qu'on exploite dans le désert des Bratski, dans les environs du Baikal & en remontant la Lena.

4) Minéraux & détails de tout ce qui mérite d'être remarqué de ces montagnes.

5) Bains chauds, & sources d'eaux minérales, lacs salés &c.

### *Section dixieme.*

Les montagnes qui en prenant leur direction à travers de la Lena entre la Podkamennaia & la Toungouska inférieure, s'avancent du côté du couchant jusqu'au dessus

dessus du Yenisei, dont les couches s'aprochent de la mer glaciale, autant que nous en avons connoissance.

*Section onzieme.*

La partie montagneuse de la Sibérie du côté du Levant, d'après le peu de connoissance qu'on en a.

*Section douzieme.*

La Presqu'île de Kamtschatka & les îles situées vis a vis du Japon & de l'Amérique; description des minéraux, & des métaux, qui s'y trouvent, autant qu'on en peut avoir de nouvelles.

*Section treizieme.*

Minéralogie de la Russie.

Elle comprendra une description détaillée de la nature & de la composition variée des montagnes mentionées ci dessus:

1) Hydrologie.
2) Halurgie.
3) Minéraux combustibles.
4) Métaux.
5) Fossiles.

# Livre second.

## Description économique & physique du regne végétal.

*Section premiere.*

Les diverses sortes du bled qu'on cultive en Russie; détail de l'agriculture & de son état dans les diffé-

rentes provinces de l'Empire, des instruments du labourage, des manieres usitées tant bonnes que mauvaises pour engraisser les champs; conseils pour les perfectioner, comme aussi pour préparer & pour conserver le bled.

### *Section seconde.*

Végétaux dont les racines ou d'autres parties servent à la nourriture; herbes potageres, legumes, racines, épiceries russes de semence & d'herbes, plantes qui appartiennent au genre des concombres, des melons & des arbouses avec leurs especes, culture & préparation: indice général des especes universellement utiles dont l'usage n'est pas encore connu; plantes & racines sauvages propres à la nourriture.

### *Section troisieme.*

Végétaux qui apportent immédiatement un avantage économique.

1) Le lin, ses especes, sa culture & préparation.

2) Le chanvre & d'autres végétaux, dont on pourra se servir à la place du chanvre:

3) Le coton, ses especes, préparation & culture.

4) Végétaux sauvages dont la soie des semences pourra devenir utile.

5) Le houblon.

6) Semences propres à exprimer de l'huile.

7) La culture du tabac.

8) Végétaux, dont la cendre sert pour en faire de la soude.

Section

### *Section quatrieme.*

Végétaux qui peuvent être employés dans les fabriques & dans les manufactures.

1) Plantes & racines bonnes à la teinture, conseils pour les cultiver & pour les bien préparer: spécification de celles qu'on peut semer avec avantage dans diverses contrées marquées de l'Empire; indice des plantes exotiques qu'on pourroit indigéner à la Russie par une culture soigneuse, comme le safran, & la plante qui fournit l'indigo.

2) Plantes & racines bonnes à la tannerie.

### *Section cinquieme.*

Végétaux salutaires & nuisibles pour la Santé.

1) Plantes utiles à la médicine, ou qu'on y pourroit employer; remedes domestiques usités en Russie, remedes pour le bétail.

2) Végétaux vénimeux & malfaisants, dont il faut ajouter le dessin pour prévenir toutes les méprises dangereuses.

### *Section sixieme.*

Herbes qui font les meilleures prairies en Russie & en Sibérie, ou dont on pourroit former des prairies artificielles. Pâturages par raport à leur diverse utilité & à toute sorte de bétail qu'on y fait paître.

### *Section septieme.*

Plantes & arbrisseaux qui aiment le terrein sablonneux & qu'on pourroit semer tant pour fixer ces terreins, que

que pour en faire des pâturages, à mesure que la population s'augmente.

*Section huitieme.*

Culture de la vigne & moyens de la perfectioner.

*Section neuvieme.*

Arbres qui portent des fruits en pommes ou à noyaux, leur culture, fruits, & grains sauvages.

*Section dixieme.*

Culture des meuriers.

*Section onzieme.*

Arbres forestiers & arbrisseaux qui croissent en Russie: arbres exotiques, qu'on pourroit propager dans l'Empire.

*Section douzieme.*

Champignons & mousses, leur utilité & leurs qualités nuisibles.

*Section treizieme.*

Détail général des végétaux spontanées en Russie; désignation des contrées où ils proviennent, & du sol qu'ils aiment préférablement, leur dénomination russe; indice de ceux qui sont odoriférants, & de ceux qui servent d'ornement aux jardins, ou qui se font remarquer par quelque autre qualité, sans répéter ce qui en a été dit plus haut, & sans entrer dans des recherches botaniques. C'est ici où il sera bon de faire mention de ces grands enclos destinés pour la coupe du bois, & de déterminer ensuite

ensuite aussi exactement qu'on peut, l'âge qu'il faut aux arbres, rélativement à la qualité du terrein, & aux forêts, pour venir à leur densité ou dureté nécessaire, & à quel tems il convient de les abattre, pour en pouvoir tirer le meilleur parti possible.

## Livre troisieme.

## Le regne animal & les avantages que la Russie en peut recueillir.

### *Section premiere.*

Animaux domestiques, & leur entretien.

1) Le Chameau & ses variétés chez les Calmouques & les autres peuples nomades.

2) Le Cheval, l'Ane & le Mulet.

3) Les Bêtes à corne & leurs variétés encore peu connuës comme le Bufle, & la vache de Tibet à crin de cheval.

4) L'entretien des brebis & l'amélioration de leur race moyennant des béliers étrangers.

5) Les Chêvres & l'utilité qu'on en peut attendre.

6) Les Rennes.

7) Les Pourceaux, & leurs especes exotiques.

8) Les animaux domestiques de moindre grandeur qui servent à la nourriture, comme le Lapin & le Cochon de mer.

### *Section seconde.*

Grands Animaux de chasse, auxquels apartiennent:

1) L'Elan.

2) Le Cerf.
3) Le Chevreuil.
4) Le Boeuf ſauvage.
5) Le Bouquetin.
6) Le Mouflon.
7) Les Antilopes.
8) L'animal qui porte le Muſc.
9) Le Sanglier.
10) Les différentes eſpeces de chevaux ſauvages.

*Section troiſieme.*

Animaux carnaciers, & ceux qui ſont eſtimés par raport à leur fourrure.

1) L'Ours blanc & l'ours terreſtre.
2) Le Glouton.
3) Le Blaireau.
4) Le Loup
5) Le Renard & ſes variétés.
6) L'Iſatis.
7) Le Loup-cervier & les chats ſauvages.
8) Les Loutres.
9) Les Martres zibelines, & les fouines.
10) Le Putois, l'Hermine, & la Civette.
11) Le Caſtor.
12) Le Lievre & ſes variétés.
13) L'Ecureuil & ſes variétés.
14) La Marmotte & ſes variétés.
15) Le Desman ou le Rat musqué.

Section

*Section quatrieme.*

Animaux qui rongent & fouillent la terre & qui font du mal aux hommes.

1) La Taupe & les autres animaux qui fouillent comme celle-ci la terre.

2) Le Hérisson & ses variétés.

3) Les Souris des champs, qui font de grands dégats dans les champs & dans les jardins.

4) Les especes de Souris vulgaires, qui causent du dommage dans les demeures.

*Section cinquieme.*

Animaux marins dont la pêche est lucrative, ou pourra le devenir.

1) La Morsse.
2) Les Phoques.
3) Les Baleines.
4) Le Dauphin & ses variétés.

*Section sixieme.*

Oiseaux.

1) Oiseaux de proie comme l'Aigle, le Faucon, l'Autour, les Hiboux.

2) Oiseaux de la famille des Corbeaux.

3) Oiseaux de la famille des Poules.

4) Les petits oiseaux qu'on mange & les autres de voliere.

5) Les Pies, les Alouettes & leurs variétés.

6) Les Hérons & leurs variétés.

7) Les différentes fortes d'oiseaux aquatiques.

8) Oiseaux domestiques.

### Section septieme.

Poissons & Pêche, salure & autres préparations de poissons.

1) Poissons d'eau douce.

*a*) L'Esturgeon & ses variétés; la colle de poisson.

*b*) Le Saumon, ses variétés, & les autres poissons passagers.

*c*) Poissons à écailles.

*d*) D'autres especes qui n'appartiennent pas aux mentionées.

2) Poissons de mer.

*a*) Poissons de proie.

*b*) La Morue & ses variétés.

*c*) Les Harengs & leurs variétés.

*d*) Poissons plats.

*e*) Les especes qui restent.

### Section huitieme.

Reptiles malfaisants.

Les Serpens, les Lézards, les Crapauds & les Grenouilles.

### Section neuvieme.

Insectes.

1) L'entretien des abeilles, leur nature & nourriture.

2) L'entretien des vers à soie, & les moyens de le perfectioner.

3) La Cochenille.

4) Les Sauterelles ordinaires, & les autres especes de ce genre.

5) Les Vermines venimeuses qui font du mal, & qui sont très incommodes.

6) Les Chenilles & les Scarabées.

7) Les insectes qui servent à la nourriture, comme l'Ecrevisse, la Crabe.

8) Les insectes remarquables à cause de leurs qualités, & les insectes utiles, ou qui peuvent le devenir.

*Section dixieme.*

Animaux Mollusques & Zoophytes.

1) Les limaçons & les autres animaux marins mangeables.

2) La moule à perles des rivieres.

3) Les vermines terrestres & aquatiques, remarquables, les unes par le bien, les autres par le mal, qu'elles nous font.

*Section onzieme.*

Spécification générale de toutes les especes d'animaux qui se trouvent en Russie, leur demeure, & leur dénomination russe selon les différents dialectes qu'on parle dans l'Empire.

## Extrait d'une Lettre de Mr. *Hähn* Sur-Intendant des Mines écrite à Mr. le Professeur *Pallas*.

De Barnaoul, le 13 Novembre 1777.

---

Notre petite montagne dite *Serpentine* (Smeyefskaya) s'est bien épuisée depuis votre absence: cependant elle fournit encore annuellement assés de minerai pour la continuation de nos travaux des fonderies. Les ouvrages souterrains de *Sémenof* se poussent avec plus d'ardeur que jamais, & fournissent seuls autant de mines de plomb qu'il en faut pour occuper continuellement six fourneaux.

L'hyver passé a été ici très doux, à l'exception de quelques bourasques & d'une grande abondance de neige. Le printems a aussi paru de bonne heure cette année. Nos rivieres étoient déja sans glaçons dès le 15 d'Avril: leurs débordements ont été petits & de peu de durée. Selon les avis que j'ai reçus de *Smeyefskaya Gora* il s'y montra le 21 Septembre un nuage chargé de beaucoup de parties terrestres, qui y causa d'épaisses ténebres. Quelques minutes après se fit sentir l'ouragan, qui poussoit devant

vant

vant soi le nuage & qui emporta les toits des fabriques qui sont sur la *Korboluha*, outre le grand dommage qu'il causa dans plusieurs habitations. Cela se passa entre 5 & 6 heures du matin. Après 7 heures de la même matinée cette tempête vint avec la même force vers nous: arrivant du Sud-Ouest, elle renversa la tuilerie, & arracha tout le toit & les chevrons de la fonderie (*), faisant sur son chemin encore d'autres ravages soit aux maisons soit dans les jardins. Cependant graces aux soins de la Providence, ce phénomene redoutable n'a couté la vie ni la santé à personne. Il auroit pu aisément en résulter un incendie, le feu ne manquant pas dans la fonderie, qui étoit d'ailleurs toute pleine de scories ardentes: on prévint ce malheur par les bonnes mesures que l'on prit sur le champ pour l'empêcher. Tous les habitans des endroits par où cet ouragan a passé, se plaignent du dégât qu'il a fait aux maisons & aux forêts.

Le 2 de ce mois (Novembre) vers le soir nous eumes les premieres bourasques qui nous apporterent une quantité médiocre de neige: elles se terminerent le 4 à neuf heures & demie du soir par un petit tremblement de terre, qui semblable au roulement d'un chariot, passa de l'Ouest à l'Est, & ne dura qu'une demie minute: les maisons & les meubles en furent ébranlés. Nous n'en avions point remarqué depuis l'année 1761, & cette année là ce fut aussi dans le mois de Novembre que la terre trembla, & cela par un mouvement cylindrique, pendant près de deux minutes.

De-

(*) Cette fonderie a 52 toises de long sur $10\frac{1}{2}$ de large: elle est adaptée pour rafraichir le cuivre de rosette & pour purifier l'oeuvre.

Depuis le mois de Juillet jusqu'à la fin d'Octobre, il a régné entre *Surgefskaya Gora*, & nos environs de l'*Ob*, le long des rivages de ce fleuve, une mortalité subite parmi les chevaux & les bœufs. En recherchant la cause du mal dans les animaux crevés, on a trouvé qu'il provenoit de vers capillaires qu'ils avoient avalés, & dont les petites rivieres, les ruisseaux, & les eaux dormantes ont été toutes remplies cette année. Ces vers avoient pénétré de l'estomac dans les poumons, dans le foie, & même dans le cœur. Il n'en réchappa que les bêtes auxquelles on administra à tems des remedes vermicides & purgatifs, outre lesquels rien ne pouvoit les sauver. Dans ma maison il y eut 9 vaches de malades, & 5 en périrent.

---

---

ANA-

# ANATOMIE.

## Notice touchant un monstre biforme, dont les deux corps sont réunis par derriere.

Le 24 de Mai 1778 le Sénat dirigeant notifia à l'Académie que dans le Gouvernement de Twer & nommément dans le Village paroissial appellé *Sabestilova Gorka*, une femme étoit accouchée d'un monstre encore vivant à double corps; demandant que l'Académie donnât une instruction par écrit touchant la maniere la plus convenable & la plus vraisemblable de conserver la vie à ce monstre & de le soigner; ou en cas de mort, de le préserver de dommage, afin de le faire parvenir à l'Académie. Celle-ci se chargea de ce soin, & l'instruction requise fut envoyée au Gouvernement de Twer.

Le monstre expira au bout de deux mois, & parvint à l'Académie peu de tems après. A son aspect on trouva qu'il étoit de cette sorte de monstres humains très rares, où les deux corps qui les composent sont joints par derriere. Les troncs entiers jusqu'à la région des han-

hanches, aussi bien que les têtes, les bras, & les pieds étoient entierement dégagés. Il n'y avoit que les bassins qui tinssent ensemble par la moitié de leur surface postérieure depuis leurs bords supérieurs jusqu'à l'extrémité inférieure de l'*os coccyx*, & il n'y avoit qu'une seule ouverture commune pour *l'intestinum rectum*.

L'Académie conserve dans sa collection 42 monstres tous différents, & il s'en trouve 60 dans celle du College de Médecine à Moscou, mais entre lesquels il y en a qui se ressemblent. Parmi les uns & les autres on n'en voit aucun de ceux qui sont biformes dont les corps soient réunis soit par les bassins, soit dans une autre région de l'épine du dos, soit par les occiputs. Il paroit donc que les trois ou quatre monstres de cette forme dont on a les descriptions (en supposant qu'il ne se soit glissé aucune erreur dans ces descriptions, ou dans les idées que les Anatomistes se sont faites de leur formation) sont, conjointement avec celui-ci, les seuls que la nature ait produits; ou du moins qu'ils n'ont jamais eu que bien peu de semblables.

Dès que l'on sait par l'observation des oeufs couvés comment les diverses parties du corps se forment peu à peu, & dès que l'on connoit la structure interne de la plupart des sortes de monstres biformes ordinaires; il n'est pas difficile d'expliquer leur formation d'une maniere très sûre & très solide. Mais alors il est d'autant plus inconcevable, comment il peut se former des monstres de cette classe, dont le corps se confondent par derriere:

c'est

c'est ce qu'on ne sauroit expliquer à moins d'en avoir anatomisé un soi même.

Il fut donc plus heureux pour l'anatomie & la physiologie que ce monstre mourût à propos, que s'il eût continué de vivre, & qu'on n'eût pas eu peut-être l'occasion de l'anatomiser. D'ailleurs la maniere dont les deux corps s'étoient joints n'auroit pu produire aucun changement dans leurs opérations naturelles; & ces deux filles (car c'étoient des corps femelles) auroient rempli chacune séparément leurs fonctions vitales comme de coutume, hormis qu'elles se seroient sans doute communiqué des maladies dont le principe auroit été dans les sucs.

Le monstre fut donc anatomisé, & l'on trouva avec étonnement que l'union de ces deux corps étoit bien différente de celle de tous les autres monstres à deux corps ou à deux têtes, & que la conformation des parties réunies ne ressembloit point du tout à la structure défigurée de tous les monstres en général: de façon que si l'on veut abstraire l'idée d'un monstre de la conformation singuliere, mais réductible à certaines regles, que l'on rencontre dans tous les individus de cette classe; on ne pourra pas même compter parmi les monstres ces deux corps joints par une simple concrétion.

Voilà donc la solution du probleme énigmatique, touchant l'idée que l'on doit se faire des monstres qui consistent en deux corps joints par derriere. Ce ne sont pas de vrais monstres, mais des corps doubles, dont la

ſimple concrétion eſt bien éloignée de la conformation extraordinaire & particuliere des monſtres proprement ainſi dits.

On donnera une deſcription détaillée de ces êtres ſinguliers avec les figures néceſſaires dans un traité qui contiendra la deſcription anatomique de toute la collection de monſtres que poſſede l'Académie, & des pieces les plus intéreſſantes de la collection de Moscou.

*C. F. Wolff.*

---

---

MÉ-

# MÉTÉOROLOGIE.

## Observation d'une Aurore Australe.

### vûe à St. Pétersbourg le $\frac{6}{17}$ Fevrier 1778.

A 10 heures du Soir il y eut d'abord une aurore boréale très vive & belle, qui d'ailleurs n'avoit rien d'extraordinaire, si ce n'est, qu'elle étoit considérablement éloignée du point de Nord, vers l'Est. Mais en même tems se fit voir un autre phénomène qui paroit remarquable dans l'histoire de ces météores & intéressant pour leur Théorie. C'étoit une Aurore *Australe*, parfaitement semblable à celles qu'on voit ordinairement vers le Nord, & placée justement au point de Sud.

Un arc lumineux, entrecoupé par des nuées, entouroit un espace plus obscur que le reste du Ciel, & lançoit de bas en haut jusqu'à une hauteur d'environ 60 degrés, des colonnes radiantes & des jets lumineux qui se dissipoient en haut par une espece de fulguration, comme s'ils étoient agités par le vent qu'il faisoit alors.

J'ai vû ce phénomene environ une heure entiere: il devint plus foible ensuite & après quelques efforts pour se renouveller il disparut entièrement.

Mr. *Grischow* a déja observé ici une lumiere australe le $\frac{6}{17}$ Novembre 1751, mais elle étoit tout à fait fixe & immobile, & ne lançoit point de gerbes. Il en a donné une description détaillée dans le IV^e^ Tome des nouveaux Commentaires.

*W. L. Krafft.*

---

# Hyver de 1777 à 1778.

## Cet hyver fut un des plus doux qu'on ait ressenti à St. Pétersbourg.

1. Il neigea pour la premiere fois le 7 Octobre 1777 & pour la derniere fois le 19 Avril 1778. L'intervalle entre ces deux termes est de 194 jours.

2. Il géla pour la premiere fois le 8 Octobre, Therm. $151^d$, & pour la derniere fois le 7 Mai, Therm. $152^d$. Cet intervalle entre la premiere & la derniere gelée est de 212 jours.

3. La Néva fut prise pendant 143 jours; depuis le 26 Novembre où elle se couvrit des glaces du Ladoga par un froid de $165^d$, jusqu'au 18 Avril au soir, où elle débacla par une temperature de $149^d$. Les Glaçons du Ladoga parurent le 29 Avril, & la Néva les charia jusqu'au 2 de Mai.

4. Depuis le 8 Octobre jusqu'au 7 Mai suivant, le plus grand froid n'a été observé que de $185^d$ le 20 & 21 Janvier

Janvier matin. Le moindre froid à midi a été de 121$^{d}$ le 25 Avril: ce qui donne une variation totale de 64 degrés de Delisle. Les jours font marqués suivant le nouveau stile.

5. Le froid moyen au matin & au soir a été trouvé de 158$^{d}$. Le froid moyen à midi de 151$^{d}$

6. Le froid au matin & au soir a été.
7 jours entre 180 & 190$^{d}$, en Janvier & Fevrier (*)
26 jours entre 170 & 180, en Novembre — Mars (**)
44 jours entre 160 & 170, en Novembre — Avril
93 jours entre 150 & 160, en Octobre — Mai
38 jours entre 140 & 150, en Octobre — Decembre, Mars — Mai : enfin
4 jours entre 130 & 140 en Avril.

7. Le froid à midi a été obfervé.
7 jours entre 130 & 120$^{d}$ en Avril & Mai (***)
15 jours entre 140 & 130 en Octobre, Novembre, Mars, Avril & Mai (****)
83 jours entre 150 & 140 en Octobre — Mai
69 jours entre 160 & 150 en Octobre — Mars
26 jours entre 170 & 160 en Novembre — Mars

10 jours

(*) le 20. 21. 22. 26. 28 Janv. & le 11. 12 Fevrier.

(**) le 27 Nov. 30. 31 Dec. 7. 8. 12. 17. 18. 19. 23. 24. 25. 27 Janv. 2. 6. 10. 13. 14. 15 Fevr. 12. 15. 18. 19. 20. 21. 22 Mars.

(***) le 22. 23. 24. 25. 26. 27 Avril & le 1 Mai.

(****) le 1. 2. 3. 4. 5. 6. 27 Oct. 5 Nov. 28 Mars, 14. 15. 16. 17. 18. 21. 28. 30 Avril & le 2. 3. 4. 5. 7 Mai.

10 jours entre 180 & 170 en Janvier & Fevrier
1 jour entre 190 & 180 le 20 Janvier.

8. L'état du Barometre depuis le 8 Octobre jusqu'au 7 Mai suivant:

la plus grande élévation 28. 83 le 11 Fevrier
la plus petite élévation 27. 03 le 24 du même mois
la variation totale - - 1. 80 ou $1\frac{4}{5}$ pouces
le milieu - - - 27. 93
la hauteur moyenne - 28. 09 c. à. d. $28\frac{9}{100}$ pouces de Paris.

Le Barometre s'est trouvé 137 jours au dessus de $27\frac{9}{10}$; 102 jours au dessus de 28, & 78 jours au dessus de $28\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9. Les vents forts, toujours pendant ce même intervalle de 212 jours d'hyver, soufflerent.

8 jours du *Nord* le 8 Oct. 4. 24. 26 Jan. 11. 17. 21 Mars, & le 13 Avril
8 jours du N-E le 30 Dec. 17 Janv. 19. 20 Mars, 14. 29 Avr. & le 3. 6 Mai
5 jours de l'Est le 27 Dec. 28 Janv. 18 Fevr. 4 Mars & le 19 Avril.
10 jours du S-E le 31 Oct. 24 Nov. 6. 16. 17. 25. 26 Dec. 12 Janv. & le 14. 26 Fevrier
7 jours du Sud le 25 Oct. 29 Nov. 24 Dec. 11 Janv. & le 15. 21. 24 Avril
12 jours du S-O le 16. 17. 23 Oct. 4. 12 Nov. 2 Déc. 29 Fevr. 28. 29. 30. 31 Mars & le 1 Mai

11 jours

11 jours de l'Oueſt le 11. 22. 28 Oct. 7. 15 Nov. 29 Janv. 3. 13 Févr. 7. 25 Mars & le 1 Avril
11 jours du N-Ou. le 13. 21 Oct. 1. 20. 22. 23 Dec. 3 Janv. 1 Févr. 12 Mars & le 7. 20 Avril

10. Les vents très forts regnerent.

2 jours du N-E le 4 & 5 Mai
1 jour de l'Eſt le 19 Février
3 jours du Sud le 30 Oct. 23 Févr. & le 22 Avril
10 jours du S-Ou. le 27 Oct. 5. 6 Nov. 15 Dec. 30 Janv. 24. 25 Févr. 24 Mars & le 16. 23 Avril
4 jours de l'Oueſt le 14 Dec. 27. 31 Janv. & le 13 Mars.

11. Les autres variations de l'Athmoſphere depuis le 8 Octobre jusqu'au 7 Mai ſuivant, ſont annotées dans la table ci-jointe

| Athmoſphere. | | Oct. | Nov. | Dec. | Janv. | Fvr. | Mars | Avr. | Mai | Somme |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| jours entierement ſereins | | 1 | 0 | 2 | 5 | 6 | 7 | 10 | 5 | 36 |
| jours entierement couverts | | 6 | 13 | 22 | 11 | 16 | 11 | 6 | 0 | 85 |
| Brouillards - - - | | 0 | 2 | 5 | 8 | 0 | 2 | 7 | 1 | 25 |
| Pluie | médiocre - - - | 10 | 1 | 6 | 0 | 0 | 5 | 7 | 2 | 31 |
| | abondante - - | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| Neige | médiocre - - | 5 | 8 | 9 | 11 | 7 | 12 | 4 | 0 | 56 |
| | abondante - - | 0 | 2 | 0 | 3 | 3 | 1 | 1 | 0 | 10 |

 État

## Etat du Barometre pour chaque mois des années 1772 — 1777.

| Année. | La plus grande Élévation le Pouces. | La plus petite Élévation le Pouces. | La hauteur moyenne | Le Barometre a été au dessus de 27, 90 | 28, 00 | 28, 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Janvier.** | | | | | | |
| 1772 | 20. 28, 61 | 13. 27, 47 | 28, 13 | 28 jours | 22 jours | 19 jours |
| 1773 | 6. 28, 35 | 12. 26, 98 | 27, 82 | 15 | 10 | 7 |
| 1774 | 3. 28, 24 | 19. 26, 98 | 27, 78 | 10 | 4 | 3 |
| 1775 | 25. 29, 11 | 9. 27, 30 | 28, 29 | 27 | 24 | 21 |
| 1776 | 6. 28, 75 | 24. 27, 52 | 28, 26 | 26 | 23 | 19 |
| 1777 | 16. 28, 86 | 6. 27, 38 | 28, 33 | 28 | 27 | 25 |
| **Février.** | | | | | | |
| 1772 | 15. 28, 48 | 27. 27, 10 | 27, 93 | 15 | 11 | 8 |
| 3 | 10. 28, 78 | 25. 27, 77 | 28, 34 | 27 | 26 | 26 |
| 4 | 4. 28, 45 | 6. 27, 30 | 27, 84 | 11 | 9 | 6 |
| 5 | 27. 28, 83 | 5. 27, 22 | 27, 99 | 17 | 14 | 11 |
| 6 | 1. 28, 28 | 6. 27, 16 | 27, 78 | 12 | 6 | 3 |
| 7 | 6. 28, 88 | 28. 27, 12 | 28, 20 | 20 | 18 | 16 |
| **Mars.** | | | | | | |
| 1772 | 8. 28, 61 | 26. 27, 51 | 28, 10 | 28 | 22 | 16 |
| 3 | 4. 28, 55 | 17. 27, 07 | 28, 07 | 22 | 19 | 17 |
| 4 | 23. 28, 78 | 2. 27, 53 | 28, 20 | 25 | 21 | 19 |
| 5 | 7. 28, 58 | 26. 27, 12 | 27, 88 | 16 | 12 | 8 |
| 6 | 22. 28, [illegible] | [illegible] 27, 41 | 27, 92 | 18 | 12 | 8 |
| 7 | 25. 28, 44 | [illegible] 27, 54 | 27, 96 | 19 | 15 | 8 |

Avril.

| Année. | La plus grande Élévation le | Pouces. | La plus petite Élévation le | Pouces. | La hauteur moyenne | Le Barometre a été au dessus de 27, 90 | 28, 00 | 28, 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **Avril.** | | | | |
| 1772 | 14. | 28, 31 | 18. | 27, 38 | 27, 86 | 11 jours | 6 jours | 5 jours |
| 1773 | 18. | 28, 72 | 30. | 27, 90 | 28, 37 | 30 | 28 | 26 |
| 1774 | 9. | 28, 69 | 25. | 27, 76 | 28, 27 | 29 | 25 | 23 |
| 1775 | 15. | 28, 44 | 12. | 27, 44 | 28, 10 | 24 | 21 | 17 |
| 1776 | 21. | 28, 73 | 13. | 27, 33 | 28, 03 | 19 | 13 | 10 |
| 1777 | 5. | 28, 61 | 17. | 27, 45 | 28, 06 | 22 | 18 | 13 |
| | | | | **Mai.** | | | | |
| 1772 | 14. | 28, 37 | 8. | 27, 55 | 28, 05 | 25 | 22 | 16 |
| 3 | 23. | 28, 63 | 7. | 27, 83 | 28, 22 | 29 | 28 | 24 |
| 4 | 11. | 28, 70 | 17. | 27, 70 | 28, 27 | 29 | 28 | 26 |
| 5 | 2. | 28, 53 | 17. | 27, 33 | 28, 07 | 22 | 20 | 17 |
| 6 | 12. | 28, 53 | 22. | 27, 46 | 28, 06 | 24 | 20 | 14 |
| 7 | 21. | 28, 41 | 19. | 27, 59 | 28, 11 | 28 | 21 | 15 |
| | | | | **Juin.** | | | | |
| 1772 | 18. | 28, 43 | 23. | 27, 63 | 27, 95 | 16 | 12 | 7 |
| 3 | 18. | 28, 52 | 4. | 27, 48 | 28, 03 | 19 | 17 | 14 |
| 4 | 2. | 28, 39 | 12. | 27, 68 | 28, 07 | 25 | 22 | 14 |
| 5 | 3. | 28, 39 | 24. | 27, 48 | 28, 09 | 25 | 20 | 15 |
| 6 | 10. | 28, 38 | 26. | 27, 62 | 28, 04 | 22 | 20 | 14 |
| 7 | 5. | 28, 27 | 28. | 27, 67 | 28, 01 | 24 | 17 | 8 |

| Année | La plus grande Élévation | | La plus petite Élévation | | La hauteur moyenne | Le Barometre a été au dessus de | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | le | Pouces. | le | Pouces. | | 27, 90 | 28, 00 | 28, 10 |
| **Juillet.** | | | | | | | | |
| 1772 | 23. | 28, 23 | 8. | 27, 46 | 27, 89 | 18 jours | 14 jours | 8 jour |
| 1773 | 20. | 28, 39 | 15. | 27, 70 | 28, 04 | 23 | 16 | 11 |
| 1774 | 27. | 28, 54 | 18. | 27, 82 | 28, 07 | 27 | 21 | 9 |
| 1775 | 23. | 28, 43 | 17. | 27, 62 | 28, 11 | 29 | 24 | 18 |
| 1776 | 26. | 28, 35 | 10. | 27, 75 | 28, 07 | 28 | 21 | 12 |
| 1777 | 30. | 28, 23 | 28. | 27, 46 | 27, 87 | 13 | 7 | 13 |
| **Août.** | | | | | | | | |
| 1772 | 6. | 28, 22 | 15. | 27, 45 | 27, 88 | 13 | 9 | 5 |
| 3 | 16. | 28, 32 | 1. | 27, 80 | 28, 05 | 28 | 22 | 10 |
| 4 | 20. | 28, 59 | 4. | 27, 68 | 28, 15 | 27 | 21 | 17 |
| 5 | 9. | 28, 62 | 25. | 27, 88 | 28, 29 | 31 | 30 | 28 |
| 6 | 7. | 28, 38 | 22. | 27, 58 | 28, 02 | 23 | 18 | 11 |
| 7 | 21. | 28, 33 | 37. | 27, 71 | 28, 07 | 25 | 21 | 15 |
| **Septembre.** | | | | | | | | |
| 1772 | 15. | 28, 33 | 4. | 27, 52 | 28, 01 | 21 | 16 | 8 |
| 3 | 30. | 28, 48 | 13. | 27, 67 | 28, 06 | 20 | 16 | 13 |
| 4 | 25. | 28, 57 | 9. | 27, 75 | 28, 28 | 28 | 27 | 25 |
| 5 | 16. | 28, 57 | 21. | 27, 88 | 28, 24 | 30 | 27 | 21 |
| 6 | 25. | 28, 29 | 6. | 27, 57 | 28, 00 | 22 | 17 | 10 |
| 7 | 28. | 28, 53 | 21. | 27, 31 | 27, 96 | 18 | 13 | 9 |

Octo-

| Année. | La plus grande Élévation le | Pouces. | La plus petite Élévation le | Pouces | La hauteur moyenne | Le Baromètre a été au dessus de 27, 90 | 28, 00 | 28, 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Octobre.** | | | | | | | | |
| 1772 | 13. | 28, 65 | 26. | 27, 41 | 28, 23 | 26 jours | 24 jours | 19 jours |
| 1773 | 9. | 28, 83 | 25. | 27, 24 | 28, 12 | 26 | 23 | 19 |
| 1774 | 29. | 28, 78 | 13. | 27, 43 | 28, 13 | 23 | 22 | 17 |
| 1775 | 3. | 28, 48 | 14. | 27, 63 | 28, 15 | 25 | 22 | 20 |
| 1776 | 24. | 28, 78 | 10. | 27, 16 | 28, 26 | 26 | 25 | 23 |
| 1777 | 3. | 28, 33 | 27. | 27, 08 | 27, 94 | 21 | 16 | 10 |
| **Novembre.** | | | | | | | | |
| 1772 | 18. | 28, 41 | 12. | 27, 66 | 28, 08 | 22 | 20 | 17 |
| 3 | 23. | 28, 88 | 1. | 27, 97 | 28, 43 | 30 | 29 | 25 |
| 4 | 27. | 28, 78 | 16. | 27, 67 | 28, 14 | 22 | 18 | 15 |
| 5 | 1. | 28, 88 | 16. | 27, 56 | 28, 26 | 26 | 26 | 23 |
| 6 | 12. | 28, 87 | 21. | 27, 02 | 28, 15 | 21 | 20 | 19 |
| 7 | 14. | 28, 42 | 7. | 27, 52 | 27, 91 | 16 | 9 | 4 |
| **Décembre.** | | | | | | | | |
| 1772 | 12. | 28, 77 | 29. | 27, 62 | 28, 10 | 23 | 16 | 11 |
| 3 | 14. | 28, 79 | 31. | 26, 85 | 28, 06 | 22 | 17 | 12 |
| 4 | 8. | 29, 21 | 23. | 27, 50 | 28, 33 | 25 | 23 | 21 |
| 5 | 16. | 28, 62 | 14. | 27, 26 | 28, 01 | 26 | 18 | 14 |
| 6 | 1. | 28, 83 | 24. | 27, 51 | 28, 07 | 22 | 17 | 12 |
| 7 | 9. | 28, 46 | 4. | 27, 36 | 28, 00 | 25 | 17 | 9 |

 Aver-

# Avertissement.

L'Echelle du Barometre est divisée en pouces, dont douze font un pied de France, nommé *pied de Roi*. Chaque pouce est subdivisé en 20 parties: de sorte qu'il est aisé d'estimer les hauteurs du mercure jusqu'aux centiemes parties de pouce.

La I^re Colomne après celle des années indique les plus grandes élévations du Barometre pour chaque mois des six années. D'abord c'est le jour où cette plus grande élévation a été observée: ensuite la hauteur même dont les deux premiers chiffres marquent les pouces entiers, qui sont 28 ou 29, & les deux suivans séparés par une virgule les centiemes parties de pouce.

La 2^de Colomne marque de la même maniere les moindres élévations du mercure dans le Barometre.

La 3^e Colomne, les hauteurs moyennes, qu'on obtient en divisant la somme de toutes les hauteurs barométriques par le nombre des observations.

Le trois dernieres Colomnes font voir, combien de jours dans chaque mois le mercure du Barometre a été au dessus des trois termes indiqués de $27\frac{8}{10}$, 28 et $28\frac{1}{10}$ pouces.

Etat

## Etat du Thermometre pour chaque mois des années 1772 — 1777.

| Année. | Jour le plus froid ou le moins chaud. | | Froid moyen matin & soir. | Thermometre au dessous de 170 d. | 150 d. | Jour le plus chaud ou le moins froid. | | Chaleur moyenne à midi. | Thermometre au dessus de 150 d. | 130 d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **Janvier.** | | | | | | | |
| 1772 | le 7 | 196 | 172 degrés | 17 j. | 31 j. | le 19 | 155 | 165 degrés | 0 j. | |
| 1773 | 29 | 203 | 178 | 23 | 29 | 10 | 146 | 169 | 4 | |
| 1774 | 15 | 190 | 175 | 21 | 31 | 19 | 149 | 167 | 1 | |
| 1775 | 24 | 191 | 168 | 10 | 30 | 12 | 147 | 163 | 3 | |
| 1776 | 18 | 200 | 181 | 27 | 31 | 31 | 155 | 172 | 0 | |
| 1777 | 30 | 185 | 166 | 8 | 31 | 6 | 148 | 160 | 1 | |
| | | | **Février.** | | | | | | | |
| 1772 | le 12 | 208 | 181 degrés | 19 j. | 29 j. | le 5 | 146 | 168 degrés | 3 j. | |
| 3 | 1 | 193 | 167 | 8 | 28 | 15 | 151 | 159 | 0 | |
| 4 | 10 | 191 | 162 | 9 | 20 | 26 | 144 | 155 | 15 | |
| 5 | 21 | 185 | 163 | 9 | 24 | 3 | 146 | 156 | 11 | |
| 6 | 4 | 187 | 156 | 5 | 18 | 15 | 145 | 150 | 21 | |
| 7 | 2 | 189 | 170 | 14 | 28 | 26 | 144 | 162 | 2 | |
| | | | **Mars.** | | | | | | | |
| 1772 | le 16 | 184 | 168 degrés | 19 j. | 25 j. | le 25 | 132 | 154 degrés | 9 j. | |
| 3 | 20 | 178 | 162 | 6 | 31 | 12 | 144 | 151 | 15 | |
| 4 | 13 | 182 | 162 | 4 | 30 | 30 | 142 | 151 | 15 | |
| 5 | 8 | 175 | 157 | 1 | 27 | 12 | 143 | 148 | 20 | |
| 6 | 31 | 177 | 160 | 4 | 28 | 16 | 142 | 151 | 16 | |
| 7 | 5 | 186 | 166 | 10 | 31 | 22 | 143 | 155 | 9 | |

| Année | Jour le plus froid ou le moins chaud. | | Froid moyen matin & soir. | Thermometre au dessous de 170 d. | Thermometre au dessous de 150 d. | Jour le plus chaud ou le moins froid. | | Chaleur moyenne à midi. | Thermometre au dessus de 150 d. | Thermometre au dessus de 130 d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Avril.** | | | | | | | | | | |
| 1772 | le 4 | 158 | 151 degrés | 0 j. | 19 j. | le 16 | 128 | 137 degrés | 30 j. | 4 j. |
| 3 | 1 | 153 | 147 | 0 | 5 | 20 | 127 | 136 | 30 | 5 |
| 4 | 8 | 171 | 153 | 1 | 18 | 28 | 124 | 140 | 25 | 5 |
| 5 | 15 | 168 | 154 | 0 | 22 | 28 | 135 | 144 | 25 | 0 |
| 6 | 1 | 176 | 156 | 1 | 25 | 10 | 136 | 144 | 27 | 0 |
| 7 | 2 | 176 | 157 | 4 | 23 | 13 | 133 | 146 | 20 | 0 |
| **Mai.** | | | | | | | | | | |
| 1772 | le 3 | 151 | 141 degrés | | 5 j. | le 20 | 125 | 133 degrés | 31 j. | 10 j. |
| 3 | 1 | 148 | 139 | | 0 | 14 | 118 | 128 | 31 | 19 |
| 4 | 11 | 147 | 136 | | 0 | 26 | 108 | 123 | 31 | 22 |
| 5 | 1 | 157 | 143 | | 4 | 26 | 116 | 133 | 31 | 9 |
| 6 | 2 | 152 | 141 | | 2 | 10 | 114 | 130 | 31 | 16 |
| 7 | 2 | 148 | 138 | | 0 | 16 | 113 | 129 | 31 | 17 |
| **Juin.** | | | | | | | | | | |
| 1772 | le 13 | 144 | 137 degrés | | | le 4 | 111 | 125 degrés | 30 j. | 23 j. |
| 3 | 5 | 138 | 131 | | | 15 | 108 | 120 | 30 | 29 |
| 4 | 18 | 138 | 128 | | | 6 | 108 | 118 | 30 | 28 |
| 5 | 8 | 147 | 134 | | | 21 | 116 | 124 | 30 | 27 |
| 6 | 6 | 141 | 132 | | | 13 | 114 | 120 | 30 | 30 |
| 7 | 7 | 139 | 131 | | | 15 | 114 | 123 | 30 | 27 |

Juil-

| Année. | Jour le plus froid ou le moins chaud. | | Froid moyen matin & soir. | Thermometre au dessous de 170 d. | 150 d | Jour le plus chaud ou le moins froid. | | Chaleur moyenne à midi | Thermometre au dessus de 150 d. | 130 d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Juillet.** | | | | | | | | | | |
| 1772 | le 7 | 136 | 129 degrés | | | le 26 | 104 | 112 degrés | 31 j. | 31 j. |
| 3 | 8 | 136 | 127 | | | 24 | 104 | 116 | 31 | 31 |
| 4 | 20 | 130 | 124 | | | 8 | 106 | 114 | 31 | 31 |
| 5 | 1 | 131 | 124 | | | 24 | 107 | 114 | 31 | 31 |
| 6 | 13 | 133 | 125 | | | 22 | 106 | 113 | 31 | 31 |
| 7 | 9 | 135 | 132 | | | 6 | 109 | 121 | 31 | 30 |
| **Août.** | | | | | | | | | | |
| 1772 | le 16 | 140 | 129 degrés | | | le 4 | 106 | 116 degrés | 31 j. | 31 j |
| 3 | 7 | 134 | 130 | | | 22 | 107 | 119 | 31 | 31 |
| 4 | 21 | 139 | 131 | | | 12 | 113 | 122 | 31 | 31 |
| 5 | 26 | 141 | 127 | | | 10 | 105 | 115 | 31 | 31 |
| 6 | 28 | 139 | 130 | | | 9 | 109 | 119 | 31 | 31 |
| 7 | 30 | 144 | 135 | | | 4 | 113 | 126 | 31 | 26 |
| **Septembre.** | | | | | | | | | | |
| 1772 | le 11 | 145 | 137 degrés | | | le 26 | 116 | 126 degrés | 30 j. | 24 j. |
| 3 | 6 | 143 | 136 | | | 10 | 121 | 129 | 30 | 19 |
| 4 | 26 | 149 | 141 | | | 5 | 114 | 131 | 30 | 11 |
| 5 | 23 | 142 | 134 | | | 10 | 116 | 124 | 30 | 29 |
| 6 | 21 | 149 | 140 | | | 29 | 124 | 130 | 30 | 15 |
| 7 | 28 | 148 | 143 | | | 3 | 127 | 134 | 30 | 4 |

| Année. | Jour le plus froid ou le moins chaud. | | Froid moyen matin & soir. | Thermometre au dessous de 170 d. | 150 d. | Jour le plus chaud ou le moins froid. | | Chaleur moyenne à midi | Thermometre au dessus de 150 d. | 130 d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Octobre.** | | | | | | | | | | |
| 1772 | le 21 | 151 | 147 degrés | | 4 j. | le 1 | 116 | 135 degrés | 31 j. | 5 j. |
| 3 | 24 | 160 | 146 | | 7 | 7 | 124 | 139 | 28 | 4 |
| 4 | 31 | 162 | 149 | | 13 | 10 | 134 | 142 | 28 | 0 |
| 5 | 30 | 153 | 140 | | 1 | 5 | 123 | 135 | 31 | 6 |
| 6 | 27 | 156 | 147 | | 11 | 7 | 128 | 141 | 30 | 2 |
| 7 | 20 | 158 | 149 | | 17 | 4 | 133 | 143 | 29 | 0 |
| **Novembre.** | | | | | | | | | | |
| 1772 | le 18 | 155 | 146 degrés | 0 j. | 5 j. | le 9 | 134 | 142 degrés | 29 j. | |
| 3 | 24 | 172 | 155 | 2 | 19 | 1 | 136 | 151 | 14 | |
| 4 | 19 | 185 | 171 | 16 | 30 | 2 | 148 | 164 | 1 | |
| 5 | 14 | 173 | 157 | 3 | 24 | 4 | 142 | 153 | 12 | |
| 6 | 12 | 172 | 159 | 1 | 29 | 4 | 141 | 152 | 9 | |
| 7 | 27 | 172 | 153 | 1 | 18 | 5 | 139 | 150 | 18 | |
| **Décembre.** | | | | | | | | | | |
| 1772 | le 30 | 174 | 156 degrés | 1 j. | 26 j. | le 19 | 145 | 152 degrés | 12 j. | |
| 3 | 24 | 181 | 159 | 4 | 29 | 6 | 146 | 153 | 12 | |
| 4 | 30 | 187 | 167 | 11 | 31 | 21 | 149 | 161 | 1 | |
| 5 | 11 | 178 | 162 | 6 | 27 | 3 | 143 | 156 | 6 | |
| 6 | 8 | 172 | 158 | 1 | 29 | 10 | 147 | 154 | 8 | |
| 7 | 31 | 173 | 158 | 2 | 29 | 15 | 144 | 153 | 11 | |

Aver-

# Avertissement.

Le Thermometre est à mercure & l'échelle divisée selon la méthode de *Delisle*: o est le terme de l'eau bouillante & 150 celui de la congélation naturelle.

La 1^re^ Colomne après celle des années contient les moindres élévations du Thermometre, qui répondent aux jours les plus froids en hyver, & les moins chauds en été.

La 2^de^ Colomne marque les froids moyens pour chaque mois des six années. Ce froid moyen se trouve en divisant la somme de toutes les hauteurs du Thermometre observées le matin & le soir par le nombre des observations.

Les deux Colomnes suivantes, c'est à dire la 3^e^ & la 4^e^, indiquent le nombre de jours auxquels le Thermometre est descendu au dessous du 170^e^ degré & au dessous du terme de la congélation naturelle 150.

La 5^e^ Colomne donne à connoître les plus grandes élévations du mercure dans le tuyau du Thermometre pour tous les mois des six années, ce qui répond aux jours les plus chauds en été, & les moins froids en hyver.

La 6^e^ Colomne marque la chaleur moyenne, qui eſt la ſomme des hauteurs du Thermometre obſervées à midi, diviſée par le nombre des jours du mois.

Les deux dernieres Colomnes indiquent le nombre des jours auxquels le Thermometre eſt monté au deſſus du point de congélation 150 & au deſſus d'une chaleur de 130 degrés.

---

---

Etat

## Etat de l'Athmosphere pour chaque mois des années 1772 — 1777.

| Année. | Calme parfait. | Petit vent. | Vent fort. | Vent très - fort. | Direction du Vent. | | | | | | | | Jours fereins. | Jours couverts. | Brouillard. | Pluie. | Neige. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Nord. | N - E. | Est. | S - E. | Sud. | S - Ou. | Oueft. | N - Ou. | | | | | |
| **Janvier.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 4 | 7 | 11 | 9 | 3 | 6 | 4 | 3 | 1 | 8 | 3 | 0 | 6 | 14 | 0 | 0 | 13 |
| 1773 | 6 | 20 | 3 | 2 | 6 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 7 | 12 | 13 | 5 | 2 | 11 |
| 1774 | 5 | 17 | 6 | 3 | 8 | 8 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 4 | 10 | 16 | 6 | 0 | 13 |
| 1775 | 0 | 12 | 10 | 9 | 10 | 1 | 0 | 4 | 1 | 2 | 6 | 7 | 5 | 18 | 6 | 1 | 12 |
| 1776 | 5 | 18 | 5 | 3 | 5 | 6 | 6 | 0 | 0 | 0 | 8 | 5 | 9 | 13 | 3 | 0 | 6 |
| 1777 | 1 | 15 | 12 | 3 | 8 | 1 | 3 | 5 | 3 | 2 | 2 | 7 | 6 | 18 | 5 | 1 | 10 |
| **Février.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 1 | 16 | 10 | 2 | 9 | 5 | 1 | 0 | 0 | 5 | 4 | 4 | 17 | 6 | 8 | 0 | 10 |
| 3 | 4 | 12 | 9 | 3 | 9 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | 4 | 9 | 3 | 18 | 8 | 0 | 11 |
| 4 | 1 | 11 | 12 | 4 | 5 | 1 | 0 | 0 | 2 | 5 | 5 | 8 | 4 | 16 | 5 | 3 | 12 |
| 5 | 1 | 9 | 13 | 5 | 4 | 9 | 0 | 0 | 2 | 6 | 4 | 3 | 4 | 17 | 1 | 2 | 13 |
| 6 | 1 | 14 | 10 | 4 | 1 | 1 | 0 | 6 | 10 | 6 | 4 | 1 | 1 | 16 | 2 | 0 | 17 |
| 7 | 6 | 16 | 5 | 1 | 11 | 5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 14 | 5 | 0 | 16 |

| Année | Calme parfait. | Petit vent. | Vent fort. | Vent très-fort. | Direction du Vent. Nord. | N-E. | Est. | S-E. | Sud. | S-Ou. | Ouest. | N-Ou. | Jours sereins. | Jours couverts. | Brouillard. | Pluie. | Neige. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Mars.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 6 | 13 | 6 | 6 | 12 | 3 | 5 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 18 | 5 | 3 | 3 | 6 |
| 3 | 4 | 14 | 11 | 2 | 8 | 2 | 1 | 2 | 2 | 6 | 2 | 5 | 13 | 10 | 6 | 0 | 9 |
| 4 | 1 | 18 | 9 | 3 | 5 | 9 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 9 | 12 | 12 | 6 | 1 | 10 |
| 5 | 4 | 16 | 5 | 6 | 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 6 | 6 | 8 | 6 | 14 | 4 | 3 | 15 |
| 6 | 4 | 16 | 8 | 3 | 9 | 0 | 7 | 1 | 2 | 5 | 5 | 2 | 5 | 15 | 3 | 2 | 16 |
| 7 | 5 | 15 | 9 | 2 | 7 | 2 | 1 | 7 | 2 | 5 | 3 | 4 | 11 | 8 | 5 | 1 | 15 |
| **Avril.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 3 | 16 | 10 | 1 | 7 | 0 | 1 | 1 | 3 | 8 | 3 | 6 | 9 | 11 | 5 | 10 | 7 |
| 3 | 13 | 8 | 6 | 3 | 4 | 1 | 0 | 4 | 10 | 6 | 1 | 2 | 16 | 8 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 6 | 15 | 5 | 4 | 1 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 5 | 3 | 8 | 0 |
| 5 | 3 | 19 | 6 | 2 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 6 | 10 | 11 | 3 | 0 | 4 | 8 |
| 6 | 4 | 19 | 6 | 1 | 8 | 3 | 4 | 3 | 1 | 1 | 5 | 5 | 10 | 5 | 3 | 6 | 12 |
| 7 | 7 | 15 | 6 | 2 | 9 | 4 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 | 9 | 9 | 5 | 3 | 6 | 5 |
| **Mai.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 3 | 12 | 9 | 7 | 4 | 11 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 10 | 11 | 10 | 3 | 12 | 4 |
| 3 | 6 | 14 | 9 | 2 | 0 | 3 | 7 | 4 | 2 | 4 | 3 | 5 | 11 | 4 | 1 | 13 | 0 |
| 4 | 5 | 11 | 11 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3 | 5 | 1 | 9 | 3 | 16 | 2 | 2 | 13 | 0 |
| 5 | 8 | 11 | 9 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 6 | 8 | 10 | 15 | 3 | 1 | 16 | 1 |
| 6 | 8 | 18 | 5 | 0 | 6 | 4 | 5 | 5 | 4 | 1 | 2 | 4 | 7 | 7 | 5 | 16 | 1 |
| 7 | 13 | 7 | 8 | 3 | 3 | 1 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 5 | 14 | 4 | 1 | 9 | 0 |

Juin.

| Année. | Calme parfait. | Petit vent. | Vent fort. | Vent très-fort. | Direction du Vent. Nord. | N-E. | Est. | S-E. | Sud. | S-Ou. | Ouest. | N-Ou. | Jours sereins. | Jours couverts. | Brouillard. | Pluie. | Neige. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Juin.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 5 | 14 | 8 | 3 | 8 | 3 | 0 | 2 | 1 | 3 | 6 | 6 | 6 | 12 | 3 | 12 | 0 |
| 3 | 3 | 13 | 6 | 8 | 0 | 1 | 9 | 1 | 1 | 5 | 5 | 7 | 10 | 11 | 1 | 14 | 0 |
| 4 | 10 | 6 | 11 | 3 | 1 | 4 | 2 | 0 | 4 | 1 | 4 | 10 | 11 | 2 | 3 | 11 | 0 |
| 5 | 5 | 11 | 10 | 4 | 2 | 4 | 2 | 0 | 3 | 6 | 6 | 3 | 9 | 4 | 0 | 13 | 1 |
| 6 | 6 | 14 | 9 | 1 | 0 | 8 | 8 | 1 | 3 | 2 | 4 | 1 | 14 | 3 | 1 | 8 | 0 |
| 7 | 6 | 9 | 12 | 3 | 0 | 0 | 6 | 3 | 3 | 2 | 9 | 7 | 10 | 3 | 0 | 13 | 0 |
| **Juillet.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 9 | 11 | 9 | 2 | 6 | 2 | 14 | 0 | 1 | 0 | 1 | 7 | 16 | 10 | 6 | 9 | |
| 3 | 11 | 11 | 5 | 4 | 4 | 2 | 6 | 3 | 1 | 2 | 3 | 8 | 17 | 3 | 3 | 12 | |
| 4 | 7 | 12 | 8 | 4 | 2 | 2 | 6 | 2 | 3 | 2 | 5 | 6 | 9 | 5 | 5 | 12 | |
| 5 | 10 | 13 | 5 | 3 | 0 | 0 | 7 | 1 | 0 | 3 | 14 | 5 | 14 | 3 | 2 | 12 | |
| 6 | 5 | 17 | 8 | 1 | 0 | 8 | 9 | 2 | 5 | 2 | 2 | 1 | 10 | 1 | 5 | 8 | |
| 7 | 11 | 11 | 6 | 3 | 0 | 4 | 2 | 5 | 1 | 4 | 8 | 3 | 3 | 5 | 0 | 27 | |
| **Août.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 7 | 20 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 11 | 4 | 6 | 3 | 18 | 4 | 17 | |
| 3 | 7 | 12 | 8 | 4 | 2 | 9 | 1 | 3 | 3 | 2 | 4 | 7 | 11 | 8 | 2 | 15 | |
| 4 | 9 | 12 | 7 | 3 | 0 | 1 | 5 | 4 | 6 | 4 | 5 | 4 | 9 | 6 | 2 | 12 | |
| 5 | 6 | 17 | 7 | 1 | 0 | 0 | 9 | 2 | 4 | 5 | 11 | 0 | 18 | 3 | 10 | 8 | |
| 6 | 5 | 19 | 4 | 3 | 0 | 6 | 2 | 2 | 5 | 4 | 8 | 0 | 10 | 12 | 6 | 17 | |
| 7 | 8 | 10 | 9 | 4 | 4 | 5 | 2 | 1 | 0 | 6 | 6 | 3 | 6 | 4 | 2 | 17 | |

Septem-

| Année. | Calme parfait. | Petit vent. | Vent fort. | Vent très-fort. | Direction du Vent. | | | | | | | | Jours sereins. | Jours couverts. | Brouillard. | Pluie. | Neige. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Nord. | N-E. | Est | S-E. | Sud. | S-Ou. | Ouest. | N-Ou. | | | | | |
| **Septembre.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 9 | 9 | 8 | 4 | 0 | 1 | 2 | 4 | 2 | 8 | 8 | 5 | 3 | 12 | 5 | 19 | |
| 3 | 4 | 10 | 9 | 7 | 1 | 6 | 1 | 2 | 4 | 3 | 8 | 3 | 9 | 10 | 5 | 19 | |
| 4 | 2 | 16 | 10 | 2 | 5 | 9 | 3 | 1 | 5 | 3 | 1 | 2 | 6 | 9 | 3 | 8 | |
| 5 | 7 | 12 | 10 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 4 | 8 | 6 | 3 | 8 | 8 | 5 | 14 | |
| 6 | 5 | 10 | 11 | 4 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 7 | 6 | 6 | 10 | 6 | 5 | 10 | |
| 7 | 4 | 13 | 9 | 4 | 2 | 6 | 5 | 2 | 4 | 7 | 2 | 2 | 5 | 9 | 0 | 19 | |
| **Octobre.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 2 | 11 | 15 | 3 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | 13 | 3 | 5 | 12 | 3 | 12 | 5 |
| 3 | 5 | 7 | 14 | 5 | 4 | 2 | 1 | 1 | 11 | 3 | 6 | 3 | 12 | 8 | 7 | 9 | 4 |
| 4 | 5 | 8 | 13 | 5 | 7 | 2 | 4 | 2 | 1 | 3 | 6 | 4 | 2 | 21 | 5 | 15 | 7 |
| 5 | 5 | 11 | 8 | 7 | 0 | 0 | 6 | 3 | 5 | 9 | 5 | 3 | 1 | 14 | 9 | 16 | 0 |
| 6 | 5 | 18 | 7 | 1 | 2 | 1 | 3 | 5 | 6 | 4 | 5 | 4 | 6 | 11 | 3 | 9 | 2 |
| 7 | 3 | 10 | 13 | 5 | 6 | 0 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 8 | 1 | 11 | 0 | 14 | 6 |
| **Novembre.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 8 | 3 | 12 | 7 | 0 | 3 | 2 | 5 | 8 | 7 | 3 | 2 | 5 | 10 | 7 | 15 | [illegible] |
| 3 | 5 | 15 | 9 | 1 | 5 | 7 | 2 | 3 | 5 | 5 | 1 | 1 | 11 | 14 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 3 | 16 | 9 | 2 | 7 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 9 | 3 | 0 | 17 |
| 5 | 5 | 16 | 8 | 1 | 1 | 0 | 4 | 6 | 3 | 6 | 9 | 1 | 3 | 16 | 8 | 8 | 8 |
| 6 | 7 | 14 | 4 | 5 | 2 | 1 | 2 | 8 | 7 | 2 | 2 | 6 | 4 | 14 | 3 | 1 | 17 |
| 7 | 7 | 15 | 6 | 2 | 1 | 1 | 5 | 5 | 1 | 8 | 4 | 5 | 0 | 18 | 2 | 3 | 1[illegible] |

Décem-

| Année. | Calme parfait. | Petit vent. | Vent fort. | Vent très-fort. | Direction du Vent. Nord. | N-E. | Est. | S.-E. | Sud. | S-Ou. | Ouest. | N-Ou. | Jours sereins. | Jours couverts. | Brouillard. | Pluie. | Neige. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Décembre.** | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1772 | 1 | 18 | 11 | 1 | 6 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 | 5 | 3 | 15 | 1 | 5 | 15 |
| 3 | 0 | 20 | 7 | 4 | 5 | 4 | 1 | 2 | 1 | 5 | 9 | 4 | 2 | 17 | 2 | 2 | 14 |
| 4 | 2 | 12 | 11 | 6 | 7 | 5 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 12 | 1 | 14 | 5 | 0 | 17 |
| 5 | 2 | 16 | 7 | 6 | 8 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 5 | 8 | 1 | 17 | 3 | 3 | 19 |
| 6 | 0 | 14 | 13 | 4 | 1 | 1 | 8 | 3 | 2 | 8 | 5 | 3 | 2 | 19 | 0 | 4 | 15 |
| 7 | 0 | 16 | 13 | 2 | 7 | 2 | 2 | 7 | 5 | 3 | 1 | 4 | 2 | 22 | 5 | 6 | 9 |

Ici toutes les colomnes après celle des années marquent le nombre de jours auxquels le vent ou la constitution de l'athmosphere indiquée au dessus a eu lieu.

# MORTS.

L'Académie Impériale des Sciences a perdu vers la fin de l'année précédente deux de ses Membres externes universellement regrettés & très dignes de l'être:

*Albert de Haller*, Chevalier de l'Ordre royal Suédois de l'Étoile polaire, Seigneur de Goumoëns-le-Jux & d'Ecfagnes, Président perpétuel de la Société royale de Göttingen & Membre du Conseil Souverain de la République de Bern, Membre des principales Académies de l'Europe:

Reçu au nombre des Académiciens externes en 1776, le 29 Décembre dans l'Assemblée solennelle par laquelle l'Académie Impériale des Sciences célébra le premier Jubilé demi-seculaire de sa fondation:

Décédé le 1er Décembre 1777 v. St.

*Charles de Linné*, Chevalier de l'Ordre royal Suédois de l'Étoile polaire, Premier Médecin du Roi de Suede & Professeur de Botanique & de Médecine à Upsala, Membre des principales Académies de l'Europe:

Reçu au nombre des Académiciens externes en 1754 le 12 Juillet:

Décédé le 30 Décembre 1777 v. St.

Leurs noms seuls tiennent lieu d'Eloges & leurs écrits bien mieux que le bronze & l'airain braveront l'injure des âges.

OUVRA-

# OUVRAGES, MACHINES
## ET
# INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier Sémestre de l'Année 1778.

Dans l'assemblée du Lundi 8 Janvier, le Secrétaire de Conférences a communiqué la lettre de Mr. *Amadeus Emanuel de Haller* qui notifie la mort de son illustre pere. (*).

Le Vendredi 12 Janvier, le Secrétaire a lu un Rapport de Mr. *Jährig* (**) qui envoie une herbe médicinale que les Calmouques nomment *Sergénä* & qu'ils emploient avec succès contre les douleurs de rhumatisme.

Le 15 Janvier, le Secrétaire a présenté de la part de Mr. *Jean Bernoulli*, Astronome royal à Berlin, le *troisieme Cahier* de ses *nouvelles littéraires de divers païs.*

Mr. le Prof. *Krafft* a communiqué: *Exposition d'une expérience nouvelle & très curieuse que Mr.* Achard, *Académicien*



(*) Voyés ci dessus pag. 66.

(**) Histoire de l'Académie A. 1777, dernier Sémestre, à l'Article *Médecine*, pag. 45.

*démicien de Berlin*, *a faite sur la formation artificielle des cristaux de roche*, extraite d'une lettre que ce chymiste habile & laborieux avoit adressée à S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Galitzin*, Envoyé extraordinaire de la Cour Impériale de Russie auprès de Leurs Hautes Puissances les États Généraux de Hollande. Mr. le Directeur ayant souhaité que cette Expérience fut répetée à l'Académie, Mr. le Prof. *Krafft* en a été chargé, & Mr. l'Adjoint *Géorgi* nommé pour l'assister. (*)

Le 19 Janvier, Mr. le Prof. *Pallas* a lu une lettre de Mr. *Hähn*, Sur-Intendant des Mines à *Barnaoul*, qui communique les détails d'un ouragan suivi d'un tremblement de terre, qu'on a essuyé à *Barnaoul* le 2 Nov. 1777, & qui fait encore part de quelques observations sur une contagion de bestiaux, & sur l'état présent des mines dans cette contrée-la. (**)

Les Séances suivantes ont toutes été uniquement occupées par les lectures des mémoires présentés par Messieurs les Académiciens.

Le 9 Février, Mr. le Prof. *Lepechin* a remis de la part de S. E. l'Archéveque de Pétersbourg & Novogorod, *Gabriel*, quelques exemplaires d'une Dissertation latine intitulée *Tentamen medicum de generalioribus in sexu foemineo a graviditate oriundis mutationibus* &c. *pro gradu Docto-*

(*) Ces expériences n'ont pas réussi, quoique Mr. le Prof. *Krafft* ait scrupuleusement suivi tous les procédés prescrits par l'ingénieux Académicien de Berlin.

(**) Voyez ci-dessus pag. 38.

*Doctoratus a Minas Isayev, Porchowo-welico-novo-grado-russo Lugd. Bat.* 12 *Apr.* 1777, pour être distribués à Mrs, les Académiciens Médecins.

—— —— le même a communiqué une lettre de Mr. *Spielmann* de Strasbourg qui contient diverses nouvelles littéraires.

Le 12 Février, Mr. le Prof. *Pallas* a remis pour le jardin botanique un paquet de différentes semences, qui lui avoient été envoyées de Moscou par Mr. *Procopief Démidof.*

Le 26 Février, le Secrétaire a lu un rapport de Mr. *Jährig* qui envoie à l'Académie une traduction allemande de quelques écrits tongouts.

Mr. l'Adjoint *Géorgi* a remis un catalogue imprimé de médailles & monnoyes, dont la vente devoit se faire à Hambourg aux plus offrans.

Le 5 Mars, Mr. le Prof. *Güldenstädt* a lu la lettre de notification de la mort du très célebre Chevalier de *Linné*, addressée à l'Académie par Mr. *Charles de Linné* son fils. (*)

Mr. le Prof. *Pallas* a communiqué une copie des observations faites par Mr. le Conseiller de Collèges *Lerch* sur les inondations arrivées à St. Pétersbourg par la crue des eaux de la Néva depuis 1741 jusqu'en 1777.



(*) Voyez ci-dessus pag. 66.

Mr. le Prof. *Krafft* a fait part d'une lettre écrite de Berlin sur une nouvelle espece de faitieres propres à garantir de la foudre les toîts des bâtimens.

Le 9 Mars, Le Secrétaire a présenté: *Untersuchung warum geimpfte Blattern gelinder und sicherer sind als die natürlichen: aus dem englischen des D.* John Mudge, *von dem Verfasser des Unterrichts gegen die Kinder-Blattern, nebst einem Anhange* &c. 8vo. Ouvrage envoyé à l'Académie par le Traducteur Mr. *Wolff*, Docteur en Médecine à Danzig.

—— —— il a lu une lettre de Mr. de *Magellan*, Gentilhomme Portugais établi à Londres, qui communique diverses nouvelles littéraires.

—— —— Mr. le Prof. *Pallas* a communiqué un plan de souscription pour des Globes, terrestre & céleste, de 15 pouces de diametre, que les Sieurs *Jeffenys* & *Haywood* à Londres ont entrepris de faire.

Le 12 Mars, Mr. le Prof. *Güldenstädt* a présenté le catalogue du Cabinet d'Histoire naturelle que possédoit le défunt Négociant *Saturgus* à Königsberg en Prusse, & que les héritiers souhaitoient de vendre en entier.

Le 19 Mars, le Secrétaire a lû des lettres, de Mr. de *Magellan* de Londres sur les verres ardens, de Mr. *Schäffer* de Ratisbonne sur ses expériences nouvelles avec l'Electrophore, & de Mrs. *Preuschen* & *Haas* de Bâle sur la Typométrie des Cartes géographiques, & spécialement sur la Carte imprimée de la Sicile.

Le

Le 23 Mars, Mr. le Directeur a remis de la part de l'Académie impériale & royale des Sciences & belles lettres de Bruxelles: *Mémoire sur les diverses méthodes inventées jusqu'a présent pour garantir les édifices d'incendie, par Mr. l'Abbé* Mann, *Chanoine. A Bruxelles de l'imprimerie Académique.* Cet intéressant ouvrage a été accompagné d'une lettre de S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Galitzin*, Envoyé extraordinaire à la Haye, adressée à Mr. le Directeur, qui sur cela a pris la résolution de faire insérer un extrait détaillé de l'ouvrage dans les Almanachs de l'année prochaine, & construire une maisonette de bois suivant la méthode du Lord Vicomte Mahon, pour faire sur elle publiquement l'expérience de l'incombustibilité.

Le 30 Mars, Mr. le Prof. *Pallas* a présenté de la part de Mr. *de Born*, Conseiller des mines & monnoyes de l'Imperatrice-Reine, le troisieme volume des mémoires d'une Société des Sçavans établie en Bohème que Mr. *de Born* publie sous le titre: *Abhandlungen einer Privat-Gesellschaft in Böhmen zum Druck befördert von Ignatz Edeln von Born.*

Le 16 Avril, Mr. *Euler* le pere a fait sçavoir que S. E. Mr. *de Cruse*, Conseiller d'Etat actuel & Médecin du Corps de *Sa Majesté Impériale* lui a envoyé tout l'appareil de barres & autres pieces d'acier trempé, que l'Académie avoit commandé à sa fabrique pour un cours complet d'expériences sur le magnétisme; qu'il a déja commencé à en aimanter plusieurs pieces, & que quelques unes en ont acquis une force magnétique fort supérieure à celle qu'on a été en état de donner jusqu'ici aux barres d'acier.

Le

Le Secrétaire a préſenté de la part de Mrs. les Aſtronomes de *Milan*, les années 1775-76-77 & 78 de leurs éphémerides aſtronomiques imprimées in 8vo.

Mr. le Prof. *Pallas* a communiqué une lettre, par laquelle Mr. *Hertel*, Candidat en Théologie à Lubec, offre en vente une collection très complette d'inſectes & d'autres animaux, qui avoit appartenu au defunt Apoticaire *Edler*.

Mr. *Euler* le pere a fait remettre un imprimé ſur *l'art de peindre* que lui avoit adreſſé le Comte *de Rosnay-Cagus* d'Orange, pour le communiquer à l'Académie.

Le 27 Avril, le Secrétaire a remis avec un rapport de Mr. *Jäbrig*, une traduction allemande que celui-ci a faite d'un écrit moungal ſur la Chronologie des premiers Patriarches dans les royaumes indiens depuis la propagation du paganisme.

Le 4 Mai, Mr. le Prof. *Pallas* a remis pour le jardin botanique une deuxieme collection contenant 400 paquets de ſemences de plantes diverſes, que Mr. *Procopief Demidof* lui avoit envoyée de Moscou.

Le 7 Mai, le Secrétaire a préſenté de la part de la Société de littérature ruſſe établie à Moscou, le 4me volume de ſes mémoires, qu'elle publie ſous le titre: **Опытъ трудовъ вольнаго Россійскаго собранія при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.**

—— il a lu une lettre de Mr. *Kratzenstein*, Doyen de la faculté de Médecine à Copenhague, qui contient diverses réflexions sur quelques objets de Physique & de Géometrie.

—— ensuite une lettre adressée à l'Académie par Mr. *Pahin de Champlin de la Blancherie* qui envoie le Prospectus & un échantillon d'un nouvel ouvrage périodique qui paroitra à Paris tous les 15 jours à compter du mois d'Avril.

—— enfin le Prospectus d'un nouveau Système de Physique universelle par Mr. *Ignazio Gajone di Casel Monferrato*, que les frères *Raimondi* vont publier à Naples.

Le 11 Mai, le Secrétaire a présenté de la part de Mr. *Preuschen*, Diacre à Carlsruh, une brochure allemande intitulée *Grundriss der typometrischen Geschichte*, imprimée à Bâle.

Le 25 Mai, le Secrétaire a lu une notification du Haut Sénat dirigeant, concernant un monstre biforme vivant, dont la femme d'un païsan est accouchée dans le Gouvernement de Twer. (*)

Le 11 Juin, Mr. le Prof. *Lepechin* a présenté & distribué aux Académiciens une dissertation inaugurale *de Spiritu ardente ex lacte bubulo*, que Mr. *Nicolas Oseretzkovski*, éleve de l'Académie a soutenue à Strasbourg pour être revetû du Grade de Docteur.

---

(*) Voyez ci-dessus l'Article *Anatomie* pag. 41.

Le 15 Juin, le Secrétaire a présenté de la part de Mr. *Lazare Spallanzani*, Professeur d'histoire naturelle à Pavie ses *Opuscules de physique animale & végétale* traduits de l'Italien par Mr. *Jean Senebier* en deux volumes in 8vo.

—— ensuite un Avis imprimé sur la publication du Catalogue du fameux Cabinet impérial-royal de médailles antiques, qui sera imprimé à Vienne par Souscription.

Mr. le Conseiller d'Etat actuel *de Stehlin* a remis le programme de Prix de la Société hollandoise des Sciences de Harlem pour l'année 1778.

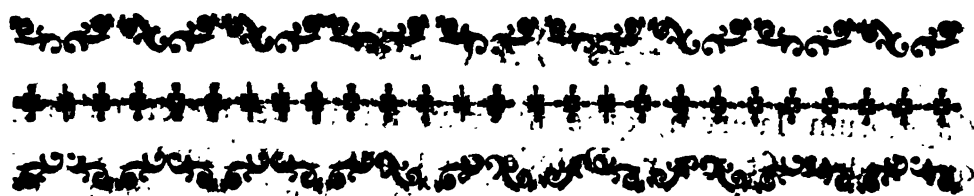
Le 18 Juin, le Secrétaire a remis: *An experimental inquiry into the cause of the changes of colours in opake and coloured bodies*, que l'Auteur Mr. *Edward Hussey Delaval* Esq. lui avoit adressé pour être présenté de sa part à l'Académie.

Le 22 Juin, le Secrétaire a présenté de la part de Mr. le Colonel *Lorgna*, l'ouvrage que celui-ci a publié à Verone sous le titre: *Memorie intorno all'acque correnti.*

---

MATHE-

2

# MATHEMATICA.

# DE CORPORIBVS REGVLARIBVS PER DOCTRINAM SPHAERICAM DETERMINATIS; VBI SIMVL NOVA METHODVS, GLOBOS SIVE COELESTES SIVE TERRESTRES CHARTA OBDVCENDI, TRADITVR.

Auctore
*L. EVLERO.*

§. 1.

Corpus regulare vocatur Polyedrum circumquaque hedris planis regularibus et inter se aequalibus inclusum, et cuius omnes anguli solidi a totidem angulis planis formantur. Hedrae ergo erunt vel triangula aequilatera, vel quadrata, vel pentagona regularia, vel etiam hexagona; ad angulos autem solidos constituendos vel ternae hedrae, vel quatuor, vel quinque, vel etiam sex concurrunt.

§. 2. In singulis hedris praeter numerum laterum cuiusque, qui sit $= n$, in computum venire debet quantitas

 singu-

singulorum laterum, quae sit $= x$, ita vt perimeter cuiusque hedrae sit $= n x$. Deinde quia quaelibet hedra est polygonum regulare, ponatur radius circuli circumscripti $= y$, hincque reperitur area cuiusque hedrae

$$= \tfrac{1}{2} n x \sqrt{(yy - \tfrac{1}{4} xx)}.$$

Denique vocetur radius sphaerae ipsi polyedro circumscriptae $= r$, eritque $\sqrt{(rr - yy)}$ perpendiculum ex centro sphaerae in quamlibet hedram demissum, cuius pars tertia in aream hedrae ducta et per numerum omnium hedrarum multiplicata dabit soliditatem totius polyedri seu corporis regularis. Ita si numerus omnium hedrarum fuerit $= N$, erit superficies polyedri $= \tfrac{1}{2} N n x \sqrt{(yy - \tfrac{1}{4} xx)}$, tota autem soliditas $= \tfrac{1}{6} N n x \sqrt{(yy - \tfrac{1}{4} xx)(rr - yy)}$. Hinc si fuerit superficies $= S$, erit haec soliditas

$$= \tfrac{1}{3} S \sqrt{(rr - yy)}.$$

§. 3. Concipiatur igitur corpori regulari sphaera circumscripta, cuius radium vocauimus $= r$, et omnes anguli solidi reperientur in superficie sphaerae, qui si arcubus circulorum maximorum iungantur, cuilibet hedrae in superficie sphaerae respondebit polygonum sphaericum regulare totidem laterum $n$; hocque modo tota superficies sphaerae, quae est $= 4 \pi r r$, diuidetur in tot huiusmodi polygona regularia sphaerica quot habentur hedrae, quarum numerus cum sit $= N$, area cuiusque horum Polygonorum sphaericorum erit $= \frac{4 \pi r r}{N}$.

§. 4. Quando ergo ternae hedrae planae ad angulos solidos constituendos concurrunt, tum in superficie sphaerica etiam ternae hedrae sphaericae in singulis angulis solidis conuenient; vnde patet in his polygonis sphae-

ricis ſingulos angulos fore = 120 gr. Sin autem quaternae hedrae planae in angulis ſolidis concurrant, in hedris ſphaericis omnes anguli debent eſſe recti ſeu 90 graduum. At ſi quinae hedrae planae concurrant, in hedris ſphaericis ſinguli anguli erunt 72 gr. Denique ſi adeo ſex hedrae planae conueniant, in polygonis ſphaericis ſinguli anguli erunt 60 gr. Ulterius enim progredi ipſa rei natura prohibet.

§. 5. His praemiſſis omnes caſus, qui quidem occurrere poſſunt, ſeorſim euoluamus. Ac primo quidem ſint omnes hedrae triangulares, quarum vel ternae, vel quaternae, vel quinae, vel ſenae in ſingulis angulis ſolidis concurrere poſſunt: ſecundo pro hedris quadrungularibus vel ternae, vel etiam quaternae concurrere poterunt: pro pentagonis autem plures quam tres occurrere non poſſe manifeſtum eſt, quod multo magis pro hexagonis valet.

## Caſus Primus.

### Pro hedris triangularibus, quarum ternae in angulis ſolidis occurrunt.

§. 6. Hic igitur eſt $n = 3$, ſitque in ſuperficie ſphaerica triangulum ſphaericum ABC cuique hedrae planae reſpondens, et quia eius ſinguli anguli A, B, C debent eſſe $= 120°$ eorum ſumma fit $360° = 2\pi$, vnde eius area colligitur $= \pi r r$, quae cum etiam ſit $= \frac{4\pi r r}{N}$, erit $N = 4$. Hinc patet quatuor tantum hedras requiri ad hoc corpus regulare formandum, vnde etiam iſtud corpus regulare Tetraedron appellatur. Quia ergo omnium angulorum planorum numerus eſt $= 12$, terni autem in ſingulis angulis ſolidis concurrant, angulorum ſolidorum numerus quoque erit $= 4$.

Tab. I. Fig. 1.

§. 7. Iam quia in triangulo sphaerico A B C dantur omnes anguli $A = B = C = 120$ gr. inde etiam latera definiri poterunt per regulas trigonometriae sphaericae. Si enim terni anguli fuerint $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, et latera ipsis opposita $a$, $b$ et $c$, erit

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta . \cos \gamma}{\sin \beta . \sin \gamma}$$

et quia omnes anguli sunt inter se aequales, erit

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \alpha^2}{\sin \alpha^2} = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Quoniam igitur nostro casu est $\alpha = 120$ gr. erit $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, ideoque $\cos a = -\frac{1}{3}$; vnde intelligitur, singula latera $AB = AC = BC$ esse quadrante maiora, ita vt excessus cuiusque supra 90 gr. sinus sit $= \frac{1}{3}$, vnde iam vnum latus erit $= 109°. 28'$; quare cum latus hedrae planae $x$ sit subtensa arcus A B erit $\frac{x}{2r} = \sin \frac{1}{2} a$. Est vero

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{(1 - \cos a)}{2}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

hinc ergo colligimus latus cuiusque hedrae $x = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

§. 8. Vt autem simul etiam radium circuli hedrae planae circumscripti $y$ inuestigemus, consideremus centrum hedrae nostrae sphaericae, quod sit in O, ex quo, ductis arcubus O A et O B, in latus A B demittamus perpendiculum O P, latus B A in P bisecans, eritque

$$\frac{x}{2r} = \sin AP \text{ et } \frac{y}{r} = \sin OA.$$

Quod si ergo in genere ponamus angulum $PAO = \alpha$ et angulum $AOP = \beta$, ob angulum A P O rectum, erit

$$\cos AP = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \text{ et } \cos OA = \cot \alpha . \cot \beta.$$

Nostro autem casu est $\alpha = 60$ gr. et $\beta = 60$ gr. hine

$$\sin \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \cos \alpha = \cos \beta = \frac{1}{2} \text{ et } \cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

vnde

vnde colligitur cof. A P $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ et cof. O A $= \frac{1}{3}$, hincque fin. A P $= \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{x}{2r}$ et fin. O A $= \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{y}{r}$. Pro noftro igitur cafu obtinetur latus hedrae $x = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$ et radius circuli circumfcripti $y = \frac{2r\sqrt{2}}{3}$.

§. 9. Ex his pro $x$ et $y$ inuentis valoribus fequitur fore, $\sqrt{(yy - \frac{1}{4}xx)} = \frac{r\sqrt{2}}{3}$ et $\sqrt{(rr - yy)} = \frac{r}{3}$; vnde pro tetraëdro, fphaerae, cuius radius $= r$, infcripto, fequentes nancifcimur determinationes, quas fimul in fractionibus decimalibus adiungamus:

| | | |
|---|---|---|
| I. Latus hedrae | $= 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $= 1,632993 . r$ |
| II. Radius circuli hedrae circumfcripti | $= \frac{2r\sqrt{2}}{3}$ | $= 0,942809 . r$ |
| III. Area cuiusque hedrae | $= \frac{2rr}{\sqrt{3}}$ | $= 1,154701 . rr$ |
| IV. Superficies tetraëdri | $= \frac{8rr}{\sqrt{3}}$ | $= 4,618804 . rr$ |
| V. Soliditas tetraëdri | $= \frac{8r^3}{9\sqrt{3}}$ | $= 0,513200 . r^3$. |

## Cafus Secundus.

### Pro hedris triangularibus, quarum quaternae in angulis folidis concurrunt.

§. 10. Hic ergo eft iterum $n = 3$, fitque in fuperficie fphaerica triangulum fphaericum A B C cuique hebrae refpondens, et quia quatuor coniunguntur, quilibet angulus erit quarta pars totius peripheriae, ideoque $= \frac{\pi}{2}$, vnde fumma trium angulorum erit 270 gr. $= \frac{3\pi}{2}$. Huius igitur trianguli fphaerici area erit $= \frac{\pi rr}{2}$, quae in tota fuperficie fphaerae octies continetur, ita ut hoc Polyedrum conftet octo haedris triangularibus, ideoque fiat N $= 8$; vnde

de tiam Octaedron vocari solet. Quia ergo numerus angulorum planorum est 24, quorum quaterni occurrunt in singulis angulis solidis, numerus angulorum solidorum erit $= 6$.

§. 11. Sit nunc iterum O centrum trianguli sphaerici, ex quo in latus A B demittatur perpendiculum O P, vt obtineatur $\frac{x}{2r} =$ sin. A P & $\frac{y}{r} =$ sin. O A. Quia nunc in triangulo A O P est $\alpha = 45$ gr. & $\beta = 60$ gr. erit sin. $\alpha =$ cos. $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} =$ et cot. $\alpha = 1$; tum vero erit vt ante sin. $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cos. $\beta = \frac{1}{2}$ & cot. $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$; vnde ex formulis superioribus colligitur cos. A P $= \frac{cos. \beta}{sin. \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ideoque sin. A P $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2r}$; porro cos. O A $=$ cot. $\alpha$ cot. $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, hincque sin. O A $= \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{y}{r}$, ideoque $x = r\sqrt{2}$ & $y = r\sqrt{\frac{2}{3}}$; ex quibus valoribus colligimus $\sqrt{(yy - \frac{1}{4}xx)} = \frac{r}{\sqrt{6}}$ et $\sqrt{(rr - yy)} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

§. 12. Ex his autem valoribus pro octaedro sequentes nascuntur determinationes:

| | | |
|---|---|---|
| I. Latus hedrae | $= r\sqrt{2}$ | $= 1{,}414214.\ r$ |
| II. Radius circuli | $= r\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $= 0{,}816496.\ r$ |
| III. Area hedrae | $= \frac{rr\sqrt{3}}{2}$ | $= 0{,}866025.\ rr$ |
| IV. Superficies } octaedri | $= 4rr\sqrt{3}$ | $= 6{,}928203.\ rr$ |
| V. Soliditas } octaedri | $= \frac{4r^3}{3}$ | $= 1{,}333333.\ r^3$ |

## Casus Tertius.

### Pro hedris triangularibus, quarum quinae in angulis solidis concurunt.

§. 13. Hic ergo iterum est $n = 3$, ac in triangulo sphaerico A B C singuli anguli erunt $= \frac{360}{5} = 72$ gr. vnde

vnde summa angulorum $= 216 = \frac{6\pi}{5}$. Hinc area trianguli sphaerici erit $= \frac{\pi rr}{5}$, quae cum sit vicies minor quam tota superficies sphaerae, hoc polyedron constabit ex viginti hedris, ita vt sit $N = 20$, vnde hoc corpus Icosaedron appellari solet. Quia porro omnino 60 anguli plani adsunt, quorum quini in angulum solidum coëunt, numerus angulorum solidorum erit $= 12$.

§. 14. Iam in triangulo sphaerae rectangulo A O P erit angulus $\alpha = 36$ gr. manente $\beta = 60$ gr. Cum igitur constet esse

$$\cos. \alpha = \sin 54 \text{ gr.} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ erit}$$

$$\sin. \alpha = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \text{ hinque}$$

$$\cot. \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}} = \frac{4}{\sqrt{(80-32\sqrt{5})}} = \frac{1}{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}.$$

tum vero vt ante erit

$$\cos. \beta = \frac{1}{2} \ \& \ \cot. \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hinc igitur fiet

$$\cos. AP = \frac{2}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}, \text{ vnde colligitur}$$

$$\sin. AP^2 = \frac{(6-2\sqrt{5})}{10-2\sqrt{5}} = \frac{40-8\sqrt{5}}{80} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \text{ ideoque}$$

$$\sin. AP = \frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{10}} = \frac{x}{2r}, \text{ vnde fit}$$

$$x = \frac{2r\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$ Deinde vero cum sit

$$\cos. OA = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} \text{ erit}$$

$$\text{sinus } OA = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{hinc } y = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

§. 15. Cum igitur sit

$$\tfrac{1}{2}x = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2\sqrt{5}},\ \text{erit}\ \tfrac{1}{4}xx = \frac{rr(5-\sqrt{5})}{10},$$

quod subtractum ab

$$yy = \frac{rr(10-2\sqrt{5})}{15}\ \text{relinquit}$$

$$\frac{(5-\sqrt{5})}{30}rr;\ \text{sicque erit}\ \sqrt{(yy-\tfrac{1}{4}xx)} = \frac{r\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{30}}.$$

Deinde vero erit

$$rr - yy = \frac{(5+2\sqrt{5})}{15}rr\ \text{ideoque}$$

$$\sqrt{(rr-yy)} = \frac{r\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

hinc igitur fiet

$$x\sqrt{(yy-\tfrac{1}{4}xx)} = \frac{rr\sqrt{(60-20\sqrt{5})}}{\sqrt{5}.\sqrt{30}} = \frac{rr\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

$$= \frac{rr\sqrt{(5-1)}}{\sqrt{15}}.$$

§. 16. Hinc igitur pro Icosaëdro sequentes nanciscimur determinationes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. Latus hedrae | $= \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$ | $= 1{,}051462.\ r$ |
| II. Radius circuli | $= \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$ | $= 0{,}607062.\ r$ |
| III. Area hedrae | $= \frac{3rr(5-\sqrt{5})}{10\sqrt{3}}$ | $= 0{,}478727.\ rr$ |
| IV. Superficies | $= \frac{6rr.(5-\sqrt{5})}{\sqrt{3}}$ | $= 9{,}574542.\ rr$ |
| V. Soliditas | $= \frac{2r^3\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{3}$ | $= 2{,}536150\ r^3$ |

Pro harum formularum euolutione numerica notasse iuuabit, esse $\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 4$ sin. 36 gr., $\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 4$ cos. 18 gr. $= 4$ sin. 72 gr. et $5-\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ sin. 18 gr. praeterea pro hedris triangularibus semper esse $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Casus

## Casus Quartus.

### Pro hedris triangularibus, quarum sex in angulis solidis concurrunt.

§. 17. Quia hic sex anguli plani concurrunt, in hedris sphaericis singuli anguli erunt $\frac{360\,gr.}{6} = 60$ gr., quorum summa in quolibet triangulo cum sit 180 gr. $= \pi$, area horum triangulorum euanescit et numerus hedrarum fiet infinitus. Scilicet tota superficies sphaerica in infinita triangula diuisa concipi potest, ita vt ipsa sphaera hoc corpus regulare exhibeat, cuius superficies est

$$= 4\pi rr = 12,56637060.rr,$$

soliditas vero $= \frac{4}{3}\pi r^3 = 4,18879020.r^3$; vnde intelligitur, sphaeram merito inter corpora regularia numerari. Manifestum autem est simili modo superficiem sphaerae etiam in innumera quadrata, vel etiam hexogona regularia, diuisam concipi posse.

## Casus Quintus.

### Pro hedris quadratis, quarum ternae in angulis solidis concurrunt.

§. 18. Hic igitur est $n = 4$ et cuilibet hedrae quadratae planae in superficie sphaerica respondet quadrilineum sphaericum A B C D, cuius singuli anguli erunt $= 120$ gr. $= \frac{2\pi}{3}$, quoniam tres tales anguli totam peripheriam complere debent. Hinc summa quatuor angulorum erit $= \frac{8\pi}{3}$, vnde, ablatis $2\pi$, remanent $\frac{2\pi}{3}$, ita vt area futura sit $= \frac{2\pi}{3}rr$, quae in tota superficie sphaerae sexies continetur, ita vt hoc polyëdrum ex sex hedris planis quadratis formetur, vnde etiam Hexaëdron vocatur, quae denominatio cum cubo congruit. Quia igitur in iis dantur 24 anguli plani, eo-

Tab. I. Fig. 2.

 rum-

rumque terni in singulis angulis solidis concurrunt, numerus angulorum solidorum erit = 8.

§. 19. Sit nunc punctum O centrum cuiusque hedrae sphaericae A B C D, vnde ad vnum angulum A ducto arcu O A et demisso in latus A B perpendiculo O P, in triangulo O A P debet esse

$$\sin. AP = \frac{x}{2r} \text{ et } \sin. AO = \frac{y}{r}.$$

Quia nunc angulus

$$\alpha = 60 \text{ gr. et } \beta = 45, \text{ fit } \sin. \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos. \alpha = \frac{1}{2}, \cot. \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sin. \beta = \cos. \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \cot. \beta = 1.$$

Hinc igitur ex regulis supra datis colligimus

$$\cos. AP = \frac{\cos. \beta}{\sin. \alpha} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \text{ et}$$

$$\cos. AO = \cot. \alpha. \cot. \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hinc ergo porro fit

$$\sin. AP = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{2r} \text{ et } \sin. AO = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{y}{r},$$

vnde habebimus

$$x = \frac{2r}{\sqrt{3}} \text{ et } y = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

sicque colligetur

$$\sqrt{(yy - \tfrac{1}{4}xx)} = \frac{r}{\sqrt{3}} \text{ et } \sqrt{(rr - yy)} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

§. 20. Ex his ergo valoribus pro Hexaëdro seu cubo sequentes adipiscimur valores:

I. Latus hedrae $= \frac{2r}{\sqrt{3}} = 1,154700.r$

II. Radius circuli $= \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 0,816496.r$

III. Area

| | | |
|---|---|---|
| III. Area hedrae | $= \frac{4rr}{3} =$ | $1{,}333333 \cdot rr$ |
| IV. Superficies | $= 8rr =$ | $8{,}000000 \cdot rr$ |
| V. Soliditas | $= \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} =$ | $1{,}539600\, r^3$ |

## Casus Sextus.

### Pro hedris pentagonis, quarum ternae in angulis solidis concurrunt.

§. 21. Hic igitur est $n = 5$, et singuli anguli hedrae sphaericae pentagonae iterum erunt 120 gr. $= \frac{2\pi}{3}$, et talium quinque angulorum summa erit $\frac{10\pi}{3}$, vnde, ablatis $3\pi$, remanet $\frac{\pi}{3}$. Hinc area erit $\frac{\pi rr}{3}$, quae in tota superficie spaerae duodecies continetur, sicque hoc corpus formabitur ex duodecim hedris pentagonis, vnde etiam Dodecaedron appellari solet, et quia omnino dantur $5 \cdot 12 = 60$ anguli plani, eorumque terni in angulis solidis coëunt, numerus angulorum solidorum erit $= 20$.

§. 22. Si hic vt hactenus constituatur triangulum sphaericum rectangulum O A P, erit angulus $\alpha = 60$ gr. et $\beta = 36$ gr. vnde habetur

$$\text{sin. } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ cot. } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{sin. } \beta = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \text{ cos. } \beta = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \text{ et}$$

$$\text{cot. } \beta = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$$

hincque colligimus

$$\text{cos. } AP = \frac{\text{cos. } \beta}{\text{sin. } \alpha} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{3}} \text{ et}$$

$$\text{cos. } OA = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}},$$

vnde fit

$\sin. AP = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{6}} = \frac{x}{2r}$, ideoque

$x = \frac{2r\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{6}} = \frac{r\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}}$,

vbi notetur esse $\sqrt{5} - 1 = 4 \sin. 18$ gr. tum vero erit

$\sin. OA = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}} = \frac{y}{r}$ ideoque

$y = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$,

vbi notetur esse $\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = 4 \sin. 36$ gr. Ex his autem colligitur

$\sqrt{(yy - \frac{1}{4}xx)} = \frac{r\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{15}}$

(vbi notasse iuuabit esse $\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = 4 \cos. 18$ gr.) et

$\sqrt{(rr - yy)} = \frac{r\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$,

tum autem erit

$x\sqrt{(yy - \frac{1}{4}xx)} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}}$.

§. 23. Hinc igitur pro dodecaedro, Sphaerae, cuius radius $= r$, inscripto sequentes inuenimus determinationes:

| | | |
|---|---|---|
| I. Latus hedrae | $= \frac{r\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$ | $= 0{,}713644\, r$ |
| II. Radius circuli | $= \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$ | $= 0{,}607062\, r$ |
| III. Area hedrae | $= rr\frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ | $= 0{,}876218\, rr$ |
| IV. Superficies | $= 2rr\sqrt{5}.\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ | $= 10{,}514616\, rr$ |
| V. Soliditas | $= \frac{2r^3(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}}$ | $= 2{,}785164\, r^3$ |

pro vltimo valore notetur esse $5 + \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \sin. 54$. gr.

§. 24. Sic igitur nacti sumus quinque illa corpora regularia, quorum inuestigatio vulgo laborem non parum

rum moleſtum, atque imprimis figuras maxime intricatas, requirere ſolet; quorum naturam hic tam facile et propemodum ſine figuris ex theoria ſphaerica deduximus, vnde ſimul patet ipſi ſphaerae ſextum locum merito concedi. Quo autem ea facilius inter ſe comparare liceat omnes eorum determinationes hic iunctim conſpectui exponamus:

| Corpus regulare. | Latus cuiusque hedrae. | Radius circl. circumſcripti | Area vnius hedrae. | Superficies tota. | Soliditas corporis. |
|---|---|---|---|---|---|
| Tetraëdron. | 1,63299$r$ | 0,94281$r$ | 1,15470$rr$ | 4,61880$rr$ | 0,51320$r^3$ |
| Octaëdron. | 1,41421$r$ | 0,81650$r$ | 0,86602$rr$ | 6,92820$rr$ | 1,33333$r^3$ |
| Icoſaëdron. | 1,05146$r$ | 0,60706$r$ | 0,47873$rr$ | 9,57454$rr$ | 2,53615$r^3$ |
| Hexaëdron. | 1,15470$r$ | 0,81650$r$ | 1,33333$rr$ | 8,00000$rr$ | 1,53960$r^3$ |
| Dodecaëdron. | 0,71364$r$ | 0,60706$r$ | 0,87622$rr$ | 10,51462$rr$ | 2,78516$r^3$ |
| Sphaera. | 0,00000$r$ | 1,00000$r$ | 0,00000$rr$ | 12,56637$rr$ | 4,18870$r^3$ |

§. 25. Hinc igitur, patet Dodecaëdron prae reliquis tam maximam ſuperficiem quam ſoliditatem habere, vnde merito ſuſpicari licet, totam ſphaerae ſuperficiem commodiſſime duodecim pentagonis planis obduci poſſe. Etſi enim ſuperficies ſphaerica nullo modo figuris planis, niſi ſint quam minimae, exacte repraeſentari poteſt: tamen nouimus, ſphaeras per lacinias chartaceas, quae in polis coeant, ſatis accurate obduci ſolere, dum ſcilicet charta aliquantillum in medio ſe expandi patitur, ita vt quampiam gibboſitatem recipiat convexitati ſphaerae conuenientem. Talem igitur effectum multo magis in pentagonis chartaceis exſpectare licebit, hicque modus vulgari longe anteferendus videtur, ideo quod hic nusquam plures tribus anguli plani ſint iungendi, cum more ſolito ad

minimum

minimum duodecim laciniae in polis concurrere debeant, id quod plerumque sine insigni vitio vix praestare licet.

§. 26. Operae igitur pretium erit inuestigare, quam exacte duodecim illa pentagona, in quae superficies globi ab inscripto Dodecaëdro diuiditur, figuris planis obduci queant; Hunc in finem primo omnes dimensiones vnius pentagoni sphaerici accurate determinemus, vbi quidem sufficiet vnicum sectorem A O B condiderasse, existente scilicet centro talis pentagoni in puncto O, et radio sphaerae manente perpetuo $= r$. Hic igitur demisso perpendiculo O P erunt anguli $\alpha = 60°$ et $\beta = 36°$, area vero talis pentagoni supra est inuenta $\frac{\pi r r}{3} = 1{,}0471975.\ rr$: tantam igitur etiam aream figura plana inducenda recipere debebit.

§. 27. Nunc more solito triangulum sphaericum A O P euoluamus, ope formularum cos. A P $= \frac{\text{cos.}\ \beta}{\text{sin.}\ \alpha}$ et cos. O A $=$ cot. $\alpha$. cot. $\beta$

| | |
|---|---|
| a *l.* cos. $\beta$ = 9,9079576 | ad. *l.* cot. $\beta$ = 10,1387390 |
| subtr. *l.* sin. $\alpha$ = 9,9375306 | adde *l.* cot. $\alpha$ = 9,7614394 |
| *l.* cos. A P = 9,9704270 | *l.* cos. O A = 9,9001784 |
| ergo A P = 20°. 54′. 19″ | hinc O A = 37°. 22′. 38″ |
| siue A P = 75259″ | siue O A = 134558″ |
| ad. *l.* A P = 4,8765584 | ad. *l.* O A = 5,1289095 |
| adde = 4,6855749 | adde - 4,6855749 |
| 9,5621333 | 9,8144844 |
| Arcus A P = 0,3648660.$r$ | Arcus O A = 0,6523556.$r$ |

§. 28.

§. 28. Eodem modo etiam computemus quantitatem arcus O P ex formula

$\cos. O P = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \beta}$, vt sequitur

| | | | |
|---|---|---|---|
| a $l. \cos. \alpha =$ | 9,6989700 | ad $l.$ O P = | 5,0576014 |
| subtr. $l. \sin. \beta =$ | 9,7692187 | adde | 4,6855749 |
| $l. \cos.$ O P = | 9,9297513 | | 9,7431763 |
| ergo O P = | $31°. 43'. 3''$ | Arcus O P = | 0,5535749.n |
| siue O P = | 114183 sec. | | |

§. 29. Consideremus nunc pari modo pentagonum regulare planum, seu potius tantum eius partem quintam, vni lateri respondentem $a o b$, cuius latus sit $ab$, centrum circuli circumscripti $o$, eiusque radius $o a$, qui, quia tanquam incognitus spectari debet, ponatur $o a = z$, ac demisso ex $o$ in latus $a b$ perpendiculo $o p$, ob angulum $a o p = 36$ gr. erit $a p = z . \sin. 36$ gr. et $o p = z \cos. 36$ gr. ideoque $a p = 0,5877853 . z$ et $o p = 0,8090170 . z$; area vero trianguli $a o p$ erit $= 0,2377671 . zz$

Tab. I. Fig. 2.

§. 30. Quia autem in hac figura angulus $o a p$ est tantum 54 gr. dum in sphaera erat 60 gr., eo angulus sphaericus neutiquam obtegi poterit, sed nimis paruus est 6 gradibus. Ad hunc ergo defectum supplendum lateri $a b$ adiungatur segmentum circulare $a \pi b$, cuius arcus cum chorda faciat angulum $p a \pi = 6$ gr. vt fiat angulus $o a \pi = 60$ gr. angulo scilicet O A P obtegendo aptus. Huius arcus centrum sit in $v$, ductaque recta $v a = v \pi$, ob angulum $v a \pi = 90$, erit angulus $a v \pi = 6$ gr.; quare si ponamus $v a = v$, erit $\frac{a p}{v} = \sin. 6$ gr. ideoque

$$v = \frac{a p}{\sin. 6 gr.} = \frac{z \sin. 36 gr.}{\sin. 6 gr.}$$

 vnde

vnde fit $v = 5{,}6232078.z$ et $l.\frac{v}{z} = 0{,}7499841$.
Cum igitur arcus $a\pi$ contineat 6 gr. $= \frac{\pi}{30}$, eius quantitas erit $a\pi = \frac{\pi}{30} v = 0{,}5888643.z$, qui si ducatur in $\frac{1}{2} v$, prodibit area sectoris $a v \pi = 1{,}655652.z^2$. Hinc auferatur area trianguli $v p a = \frac{1}{2} ap.vp = \frac{1}{2} v$ sin. 6 gr. $v$ cos. 6 gr. $= \frac{1}{4} v v$ sin. 12 gr. $= 1{,}643566.z^2$, et remanebit area semi-segmenti $\pi a p = 0{,}012086 z^2$, quae addita ad aream trianguli $o p a = 0{,}237767.zz$ producet aream trilinei

$$o a \pi = 0{,}249853.zz$$

quae decies sumta dabit aream totius figurae planae quam quaerimus $= 2{,}49863\, zz$. Denique cum sit $v p = v$ cos. 6 gr. $= 5{,}592403$, haec linea a $v\pi = v$ subducta relinquet sagittam $p\pi = 0{,}030804$, vnde fit recta $o\pi = 0{,}839821.z$

§. 31. Omnes igitur has determinationes, quas tam pro figura sphaerica quam pro figura plana inuenimus, ita repraesentemus, vt vno obtutu percipi queant

| Pro Pentagono sphaerico | Pro Pentagono plano. |
|---|---|
| $OA = 0{,}6523556.r$ | $oa = z$ |
| $AP = 0{,}3648660.r$ | $a\pi = 0{,}5888643.z$ |
| $OP = 0{,}5535749.r$ | $o\pi = 0{,}8398210.z$ |
| tota area $= 1{,}0471975.rr$ | tota area $= 2{,}49863.zz$ |

§. 32. Vt nunc hae duae figurae satis exacte inter se congruere queant, dum scilicet charta circa medium $o$ aliquantillum expanditur, quod humectatione facillime obtinetur, manifestum est, extremitates, vbi talis expansio locum non habet, exacte inter se conuenire debere, ita vt fiat $a\pi = AP$ siue $0{,}5888643\, z = 0{,}3648660.r$, vnde colligitur

$$z = \frac{0{,}3648660\, r}{0{,}5888643} = 0{,}6196096.r \text{ et } l\frac{z}{r} = 9{,}7921125$$

hoc

hoc igitur valore ſubſtituto praecedentes determinationes ad ſequentes valores reducentur:

| Pro Pentagono ſphaerico | Pro Pentagono plano. |
|---|---|
| A O = 0,6523556. $r$ | $o\,a$ = 0,6196097. $r$ |
| A P = 0,3648612. $r$ | $a\,\pi$ = 0,3648612. $r$ |
| O P = 0,5535749. $r$ | $o\,\pi$ = 0,5175824. $r$ |
| tota area = 1,0471975. $rr$ | tota area = 0,9591895. $rr$ |

Vnde apparet per expanſionem chartae rectam $o\,a$ incrementum capere debere = 0,0327459. $r$, quod eſt fere viceſima pars totius longitudinis; at vero recta $o\,\pi$ capere debet incrementum 0,0359925. $r$, quod valet circiter partem decimam quartam; denſque totius ſuperficiei incrementum erit = 0,0880080, quae eſt pars fere vndecima: tantam autem expanſionem chartam recipere poſſe experientia ſatis declarat, hinc itaque ſequens problema commode reſoluere poterimus.

## Problema.

Superficiem dati globi per duodecim pentagona plana quam fieri poteſt exactiſſime obducere.

## Solutio.

Sit radius globi dati $= r$, et in plano deſcribatur circulus radio $z = 0{,}6196097.r$, cui inſcribatur pentagonum regulare, ſuper cuius ſingulis lateribus adiungantur ſegmenta circularia $a\,\pi\,b$ radio

$$= v = 5{,}6232078.\,z = 3{,}484114.\,r$$

tum huiusmodi duodecim pentagona accurate ex charta exſcindantur, iisque ternis ad angulos coniungendis ſuperficies globi ſatis perfecte obtegi poterit.

# DILVCIDATIONES
## SVPER METHODO ELEGANTISSIMA, QVA ILLVSTRIS *DE LA GRANGE* VSVS EST IN INTEGRANDA AEQVATIONE DIFFERENTIALI

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Postquam diu et multum in perscrutanda aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ desudassem, atque imprimis in methodum *directam*, quae via facili ac plana ad eius integrale perduceret, nequicquam inquisiuissem; penitus obstupui, cum mihi nunciaretur, in volumine quarto *Miscellaneorum Taurinensium* ab Illustri *de la Grange* talem methodum esse expositam, cuius ope pro casu, quo

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 \text{ et}$$
$$Y = A + By + Cyy + Dy^3 + Ey^4$$

propositae aequationis differentialis hoc integrale algebraicum, atque adeo completum felicissimo successu elicuit.

$$\frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{(\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2)}$$

vbi $\Delta$ denotat quantitatem constantem arbitrariam per integrationem ingressam.

§. 2.

§. 2. Illud autem egregium inuentum eo magis sum admiratus, quod equidem semper putaueram, talem methodum in inuestigando idoneo factore, quo aequatio proposita integrabilis redderetur, quaeri oportere, cum vulgo omnis methodus integrandi vel in separatione variabilium, vel in idoneo multiplicatore contineri videatur, etiamsi certis casibus quoque ipsa differentiatio ad integrale perducere queat, quemadmodum tam a me ipso quam ab aliis per plurima exempla est ostensum. Ad hanc autem tertiam viam illa ipsa methodus *Grangiana* rite referri posse videtur.

§. 3. Quanquam autem facile est inuentis aliquid addere, tamen in re tam ardua plurimum intererit, hanc methodum ab Illustri *la Grange* adhibitam accuratius perpendisse atque ad vsum analyticum magis accommodasse; siquidem totum negotium multo facilius ac simplicius expediri posse videtur; quamobram, quae de hoc argumento, quod merito maximi momenti est censendum, sum meditatus, hic data opera fusius sum expositurus.

§. 4. Quoniam autem hoc integrale ab Illustri *la Grange* iuuentum, ab iis formis quas ipse olim dederam, plurimum discrepat, ac simplicitate non mediocriter antecellit, ante omnia visum est scitari, quomodo aequationi differentiali satisfaciat. Hunc in finem pono breu. gr. $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = V$, vt habeam

$$\frac{V}{x-y} = \sqrt{(\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2)},$$

quam aequationem ita differentiare oportet, vt constans arbitraria $\Delta$ ex differentiali excedat. Sumtis igitur quadratis erit

 $\frac{V^2}{(x-y)^2}$

$\frac{VV}{(x-y)^2} = \Delta + D(x+y) + E(x+y)^2$, quae differentiata dat

$$\frac{2VdV}{(x-y)^2} - \frac{2VV(dx-dy)}{(x-y)^3} -$$
$$D(dx+dy) - 2E(x+y)(dx+dy) = 0.$$

§. 5. Quo nunc calculus planior reddatur, seorsim partes vel per $dx$ vel per $dy$ affectas inuestigemus. Pro elemento igitur $dx$, si $y$ vt constans spectetur, erit

$$dV = \frac{X' dx}{2\sqrt{X}},$$

vnde singulae partes ita se habebunt:

$$dx\left(\frac{VX'}{(x-y)^2\sqrt{X}} - \frac{2VV}{(x-y)^3} - D - 2E(x+y)\right)$$

vbi notetur esse $V = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$, hincque

$$VV\sqrt{X} = (X+Y)\sqrt{X} + 2X\sqrt{Y}$$

vnde hic duplicis generis termini occurrunt, dum vel per $\sqrt{X}$ vel per $\sqrt{Y}$ sunt affecti. Duo autem termini adsunt $\sqrt{Y}$ affecti, qui sunt

$$-\frac{4X\sqrt{Y}}{(x-y)^3} + \frac{X'\sqrt{Y}}{(x-y^2)},$$

qui ergo iunctim sumti dabunt

$$\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)^3}(X'(x-y) - 4X),$$

quae forma ob

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4, \text{ hincque}$$
$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3, \text{ dabit}$$
$$X'(x-y) - 4X = -4A - B(3x+y)$$
$$-2C(xx+xy) - D(x^3+3xxy) - 4Ex^3y.$$

Termini autem per $\sqrt{x}$ affecti sunt

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-y)^3}(X'(x-y) - 2(X+Y) - D(x-y)^3 - 2E(x+y)(x-y)^3).$$

Cum

Cum igitur sit

$$X + Y = 2A + B(x+y) + C(x^2+y^2)$$
$$+ D(x^3+y^3) + E(x^4+y^4)$$

facta substitutione iste postremus factor erit

$$-4A - B(x+3y) - 2C(xy+yy)$$
$$- D(3xyy+y^3) - 4Exy^3$$

quae forma a praecedente hoc tantum discrepat, quod litterae $x$ et $y$ sunt permutatae.

§. 6. Quod si ergo breu. gr. ponamus

$$M = 4A + B(3x+y) + 2C(xx+xy)$$
$$+ D(x^3+3xxy) + 4Ex^3y$$
$$N = 4A + B(x+3y) + 2C(yy+xy)$$
$$+ D(y^3+3xyy) + 4Exy^3$$

hinc pars elemento $dx$ affecta ita erit expressa:

$$-\frac{dx}{(x-y)^3\sqrt{X}}(M\sqrt{Y} + N\sqrt{X}).$$

§. 7. Simili modo

ob $dV = \frac{Y' dy}{2\sqrt{Y}}$,

partes elemento $dy$ affectae erunt

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}\left(\frac{VY'}{(x-y)^2} + \frac{2VV\sqrt{Y}}{(x-y)^3} - D\sqrt{Y} - 2E(x+y)\sqrt{Y}\right).$$

Haec iam forma ob

$$V = \sqrt{X} + \sqrt{Y} \text{ et } VV\sqrt{Y} = (X+Y)\sqrt{Y} + 2Y\sqrt{X}$$

continebit sequentes terminos per $\sqrt{X}$ affectos,

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-y)^3}(Y'(x-y) + 4Y)$$

quae forma ex priore praecedentis calculi oritur, si litterae $x$ et $y$ permutentur, simulque signa; vnde patet hanc expressi-

pressionem praebere valorem $+$ N. Reliqui autem termini per $\sqrt{Y}$ effecti erunt

$$\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)^3}\left(Y'(x-y)+2(X+Y)-D(x-y)^2-2E(x+y)(x-y)^2\right).$$

Haec forma iterum ex permutatione litterarum et signorum ex forma praecedentis calculi oritur, quae ergo cum esset $-$N, haec erit $+$M. Hoc igitur modo partes elementum $dy$ continentes erunt

$$\frac{+dy}{(x-y)^3\sqrt{Y}}(N\sqrt{X}+M\sqrt{Y}).$$

§. 8. Coniungendis igitur his membris aequatio differentialis ex forma *Grangiana* orta erit

$$\left(\frac{dy}{\sqrt{Y}}-\frac{dx}{\sqrt{X}}\right)\left(\frac{N\sqrt{X}+M\sqrt{Y}}{(x-y)^3}\right)=0,$$

quae per factorem comunem diuisa praebet ipsam aequationem differentialem propositam $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$; vnde simul patet aequationem integralem exhibitam recte se habere, atque adeo valorem litterae $\Delta$ arbitrio nostro penitus relinqui.

§. 9. Antequam autem methodum *Grangianum* ad ipsam aequationem differentialem $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ in omni extensione acceptam applicemus, a casu simpliciore inchoëmus, quo aequatio adeo rationalis proponitur haec:

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx}=\frac{dy}{a+2by+cyy}.$$

## Analysis.

### Pro integratione aequationis differentialis.

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx}=\frac{dy}{a+2by+cyy}.$$

§. 10. Ponamus br. gr. $a+2bx+cxx=X$ et $a+2by+cyy=Y$, vt fieri debeat $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$, quae formu-

formulae cum inter se debeant esse aequales, vtraque per idem elementum $dt$ designetur, ita vt nanciscamur has duas formulas: $\frac{dx}{dt} = X$ et $\frac{dy}{dt} = Y$.
Quod si ergo iam statuamus

$$x - y = q, \text{ erit } \frac{dq}{dt} = X - Y = 2bq + cq(x + y)$$

vnde per $q$ diuidendo erit $\frac{dq}{qdt} = 2b + c\,(x + y)$.

§. 11. Nunc primas formulas differentiemus, sumto elemento $dt$ constante, et facto

$$dX = X' dx \text{ et } dY = Y' dy$$

orientur hae duae aequationes:

$$\frac{ddx}{dxdt}\; X' \text{ et } \frac{ddy}{dydt} = Y',$$

quae inuicem additae praebent

$$\frac{ddx}{dxdt} + \frac{ddy}{dydt} = X' + Y'.$$

Quare cum sit

$$X' = 2b + 2cx \text{ et } Y' = 2b + 2cy \text{ erit}$$

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy}\right) = 4b + 2c\,(x + y).$$

§. 12. Quoniam igitur hic postremus valor duplo maior est praecedente $\frac{dq}{qdt}$, hoc modo deducti sumus ad hanc aequationem:

$$\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy} = \frac{2dq}{q},$$

quae integrata dat $l\,dx + l\,dy = 2\,l\,q$ + const, hincque in numeris erit

$$dx\,dy = Cqq\,dt^2, \text{ ita vt sit } C = \frac{dxdy}{qqdt^2}.$$

Quare cum sit

$$\frac{dx}{dt} = X \text{ et } \frac{dy}{dt}\; Y, \text{ aequatio integralis erit}$$

$\frac{XY}{(x-y)^2} = C$, quae ergo non solum est algebraica, sed etiam completa.

§. 13. Si igitur proposita fuerit haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx} = \frac{dy}{a+2by+cyy},$$

eius integrale completum ita erit expressum:

$$\frac{(a+2bx+cxx)(a+2by+cyy)}{(x-y)^2} = C$$

quae, vtrinque addendo $bb-ac$, induet hanc formam:

$$\frac{aa+2ab(x+y)+2acxy+bb(x+y)^2+2bcxy(x+y)+ccxxyy}{(x-y)^2} = \Delta\Delta,$$

sicque, extracta radice, integrale hanc formam habebit:

$$\frac{a+b(x+y)+cxy}{x-y} = \Delta;$$

quae sine dubio est simplicissima, quandoquidem tam $y$ per $x$ quam $x$ per $y$ facillime exprimi potest, cum sit

$$y = \frac{(\Delta-b)x-a}{\Delta+b+cx} \quad \text{et} \quad x = \frac{a+(\Delta+b)y}{\Delta-b-cy}.$$

§. 14. Calculum, quo hic vsi sumus, perpendenti facile patebit, in his formis X et Y, non vltra quadrata progredi licere. Si enim ipsi X insuper tribuamus terminum $dx^3$ et ipsi Y terminum $dy^3$, pro priore forma prodit

$$\frac{X-Y}{x-y} = 2b+c(x+y)+d(xx+xy+yy) = \frac{dq}{qdt};$$

pro altera autem forma est

$$X'+Y' = 4b+2c(x+y)+3d(xx+yy) = \frac{ddx}{dxdt}+\frac{ddy}{dydt}.$$

Quare si hinc duplum praecedentis auferamus, colligitur

$$\frac{ddx}{dxdt}+\frac{ddy}{dydt}-\frac{2dq}{qdt} = d(x-y)^2,$$

quam aequationem non amplius integrare licet.

§. 15. Facile autem ostendi potest, talem aequationem differentialem, in qua vltra quadratum proceditur, nullo amplius modo algebraice integrari posse. Si enim tan-

tantum his casus proponeretur, $\frac{dx}{1+xx} = \frac{dy}{1+yy}$, notum est, vtrinque integrale partim logarithmos partim arcus circulares inuoluere, ideoque quantitates transcendentes diuersos, quae nullo modo inter se comparari possunt. Huiusmodi scilicet comparationes iis tantum casibus locum habere possunt, quando vtrinque vnius generis tantum quantitates transcendentes occurrunt.

## Analysis.

### Pro integratione aequationis

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx} + \frac{dy}{a+2by+cyy} = 0.$$

§. 16. Quod si hic vt ante ponamus $\frac{dx}{a+2bx+cxx} = dt$, statui debebit $\frac{dy}{a+2by+cyy} = -dt$: at vero si calculum simili modo quo ante instituere vellimus, nihil plane proficimus. Postquam autem omnes difficultates probe perpendissem, tandem in artificium incidi, quo hunc casum expedire licuit, ita vt hinc non contemnendum incrementum methodo *Grangianae* attulisse mihi videar.

§. 17. Quoniam igitur has duas habeo aequationes: $\frac{dx}{dt} = X$ et $\frac{dy}{dt} = -Y$, hinc formo istam nouam aquationem:

$$\frac{ydx+xdy}{dt} = yX - xY.$$

Iam facio $xy = u$, vt habeam

$$\frac{du}{dt} = a(y-x) + cxy(x-y),$$

vnde posito

$$x - y = q \text{ erit } \frac{du}{dt} = q(cu-a),$$

 quae

quae aequatio per $cu-a$ diuisa ductaque in $c$ praebet $\frac{c\,du}{dt(cu-a)}=cq$, hocque modo nacti sumus differentiale logarithmicum.

§. 18. Dein vero aequationes principales vt ante differentiemus, et obtinebimus

$$\frac{ddx}{dt\,dx}=X' \text{ et } \frac{ddy}{dt\,dy}=-Y',$$

quae inuicem additae dant

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{ddx}{dx}+\frac{ddy}{dy}\right)=X'-Y'=2cq;$$

quare si hinc duplum praecedentis aequationis subtrahamus, remanebit

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{ddx}{dx}+\frac{ddy}{dy}-\frac{2c\,du}{cu-a}\right)=0,$$

vnde per $dt$ multiplicando et integrando nanciscimur $l\,dx+l\,dy-2\,l(cu-a)=l\,C$, ideoque $\frac{dx\,dy}{(cu-a)^2}=C\,dt^2$. Cum igitur sit $dx=X\,dt$ et $dy=-Y\,dt$, aequatio integralis nostra erit $-\frac{XY}{(cu-a)^2}=C$.

§. 19. Per hanc ergo analysin deducti sumus ad hanc aequationem integralem aequationis propositae:

$$\frac{(a+2bx+cxx)(a+2by+cyy)}{(a-cxy)^2}=C.$$

quae aequatio, si vtrinque vnitas subtrahatur, reducitur ad hanc formam:

$$\frac{2ab(x+y)+ac(x+y)^2+4bbxy+2bcxy(x+y)}{(a-cxy)^2}=C.$$

§. 20. Illustremus hanc integrationem exemplo, ponendo $a=1$, $b=0$ et $c=1$, ita vt proposita sit haec aequatio differentialis: $\frac{dx}{1+xx}+\frac{dy}{1+yy}=0$, cuius integrale nouimus esse A tang. $x$ + A tang. $y$ = A tang. $\frac{x+y}{1-xy}=C$,

sicque

sicque nouimus esse $\frac{x+y}{1-xy}=C$. At vero nostra postrema formula dat pro hoc casu

$$\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}=C \text{ ideoque } \frac{x+y}{1-xy}=C$$

quod egregie conuenit.

§. 21. Consideremus etiam casum, quo $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ et $c=1$, ita vt proponatur haec aequatio:

$$\frac{dx}{1+x+xx}+\frac{dy}{1+y+yy}=0,$$

cuius integrale est

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\text{ A tang. }\frac{x\sqrt{3}}{2+x}+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{ A tang. }\frac{y\sqrt{3}}{2+y}=C,$$

vnde sequitur fore

$$\text{A tang. }\frac{2(x+y+xy)\sqrt{3}}{4+2(x+y)-2xy}=C,$$

ideoque etiam $\frac{x+y+xy}{2+x+y-xy}=C$. At vero forma integralis inuenta pro hoc casu dabit

$$\frac{x+y+(x+y)^2+xy+xy(x+y)}{(1-xy)^2}=C$$

quae in factores resoluta dat

$$\frac{(1+x+y)(x+y+xy)}{(1-xy)^2}=C.$$

Prior vero aequatio

$$\frac{x+y+xy}{2+x+y-xy}=C \text{ inuersa praebet } \frac{2+x+y-xy}{x+y+xy}=C,$$

et vnitate subtracta $\frac{2-2xy}{x+y+xy}=C$, atque haec in praecedentem ducta dat $\frac{1+x+y}{1-xy}=C$.

§. 22. Videamus igitur, vtrum haec posteriores aequationes inter se conueniant, et quia constantes vtrinque inter se discrepare possunt, ambas aequationes ita referamus:

$$\frac{1-xy}{x+y+xy}=\alpha \text{ et } \frac{1+x+y}{1-xy}=\beta;$$

 vnde

vnde cum sit $\frac{1}{\alpha} = \frac{x+y+xy}{1-xy}$, euidens est fore $\beta - \frac{1}{\alpha} = 1$, ex quo pulcherrimus consensus inter ambas formulas elucet. Ex his exemplis intelligitur aequationem generalem supra inuentam hoc modo per factores repraesentari posse:

$$\frac{(2b+c(x+y))(a(x+y)+2bxy)}{(a-cxy)^2}.$$

Ceterum consideratio harum formularum haud iniucundas speculationes suppeditare poterit.

§. 23. Sequenti autem modo forma illa integralis inuenta:

$$\frac{(2b+c(x+y))(a(x+y)+2bxy)}{(a-cxy)^2} = C$$

statim ad formam simplicissimam reduci potest; si enim eius factores statuamus

$$\frac{2b+c(x+y)}{a-cxy} = P \text{ et } \frac{a(x+y)+2bxy}{a-cxy} = Q$$

vt esse debeat $PQ = C$, erit

$$aP - cQ = \frac{2ab-2bcxy}{a-cxy} = 2b \text{ vnde fit } Q = \frac{aP-2b}{c},$$

sicque quantitati constanti aequari debet haec forma: $\frac{aPP-2bP}{c}$; ex quo patet, etiam ipsam quantitatem P constanti aequari debere, ita vt iam aequatio nostra integralis sit

$$\frac{2b+c(x+y)}{a-cxy} = C, \text{ vel etiam } \frac{a(x+y)+2bxy}{a-cxy} = C.$$

## Alia solutio facillima eiusdem aequationis

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx} + \frac{dy}{a+2by+cyy} = 0.$$

§. 24. Postrema reductione probe perpensa, comperui, statim ab initio ad formam integralis simplicissimam perueniri posse, atque adeo non necesse esse ad differentialia secunda ascendere. Si enim vt ante ponamus $x+y = p$

$=p$; $x-y=q$ et $xy=u$, ex formulis

$$\frac{dx}{dt}=X \text{ et } \frac{dy}{dt}=-Y$$

ſtatim deducimus

$$\frac{dp}{dt}=X-Y=2bq+cpq, \text{ vnde fit } \frac{dp}{2b+cp}=q\,dt.$$

§. 25. Porro vero erit

$$\frac{ydx+xdy}{dt}=\frac{du}{dt}=yX-xY=-aq+cqu,$$

vnde fit $\frac{du}{cu-a}=q\,dt$, quam ob rem hinc ſtatim colligimus hanc aequationem: $\frac{dp}{2b+cp}=\frac{du}{cu-a}$, cuius integratio praebet $l(2b+cp)=l(cu-a)+lC$; vnde deducitur haec aequatio algebraica: $\frac{2b+cp}{cu-a}=C$, quae, reſtitutis literis $x$ et $y$, dat $\frac{2b+c(x+y)}{cxy-a}=C$, quae eſt forma ſimpliciſſima aequationis integralis deſideratae. Hic imprimis notatu dignum occurrit, quod caſum primum hac ratione reſolvere non licet.

§. 26. Ex forma autem integrali inuenta facile aliae deriuantur, veluti ſi addamus $\frac{2b}{a}$, orietur haec forma $\frac{a(x+y)+2bxy}{cxy-a}=C$, quae per praecedentem diuiſa denuo nouam formam ſuppeditat, ſcilicet: $\frac{2b+c(x+y)}{a(x+y)+2bxy}=C$, quae formae quomodo ſatisfaciant operae pretium erit oſtendiſſe. Et quidem poſtrema forma, differentiata, erit

$$\frac{-2ab(dx+dy)-4bb(ydx+xdy)-2bc(yydx+xxdy)}{(a(x+y)+2bxy)^2}$$

quae in ordinem redacta praebet

$$dx(2ab+4bby+2bcyy)+dy(2ab+4bbx+2bcxx)=0.$$

Haec per $2b$ diuiſa et ſeparata dat

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx}+\frac{dy}{a+2by+cyy}=0$$

quae eſt ipſa propoſita.

Ana-

# Analysis.

## Pro integratione aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(\Delta + Bx + Cxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(\Delta + By + Cyy)}}.$$

§. 27. Introducto nouo elemento $dt$, deinceps pro constanti habendo, oriuntur hae duae aequationes:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{X} \text{ et } \frac{dy}{dt} = \sqrt{Y},$$

vbi literis X et Y valores initio assignatos tribuamus. Videbimus autem, pro methodo, qua hic vtemur, terminos litteris D et E affectos omitti debere. Sumtis ergo quadratis erit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = X \text{ et } \frac{dy^2}{dt^2} = Y.$$

§. 28. Nunc istas formulas differentiemus, positoque, vt fieri solet, $dX = X' dx$ et $dY = Y' dy$ nanciscemur has aequationes:

$$\frac{2ddx}{dt^2} = X' \text{ et } \frac{2ddy}{dt^2} = Y',$$

ac posito $x + y = p$ fiet $\frac{2ddp}{dt^2} = X' + Y'$. Cum iam sit

$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3 \text{ et}$$
$$Y' = B + 2Cy + 3Dyy + 4Ey^3 \text{ erit}$$
$$X' + Y' = 2B + 2Cp + 3D(xx + yy) + 4E(x^3 + y^3) = \frac{2ddp}{dt^2},$$

quae aequatio manifesto integrationem admittet, si fuerit et $D = 0$ et $E = 0$, quemadmodum assumsimus. Multiplicando igitur per $dp$ et integrando nanciscimur

$$\frac{dp^2}{dt^2} = \Delta + 2Bp + Cpp$$

et radicem extrahendo

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{(\Delta + 2Bp + Cpp)}.$$

Cum

Cum igitur sit $\frac{dp}{dt} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$, aequatio integralis, quam sumus adepti, erit

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{(\Delta + 2B(x+y) + C(x+y)^2)},$$

quae adeo est algebraica; vbi notetur esse

$$X = A + Bx + Cxx \text{ et } Y = A + By + Cyy.$$

§. 29. Sumamus igitur quadrata, et nostra aequatio integralis erit

$$2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + 2\sqrt{XY}$$
$$= \Delta + 2B(x+y) + C(x+y)^2, \text{ siue}$$
$$2A - B(x+y) - 2Cxy + 2\sqrt{XY} = \Delta,$$

quae penitus ab irrationalitate liberata, posito $\Delta - 2A = \Gamma$ praebebit

$$4XY = 4AA + 4AB(x+y) + 4AC(xx+yy)$$
$$+ 4BBxy + 4BCxy(x+y) + 4CCxxyy$$
$$= \Gamma^2 + 2\Gamma B(x+y) + 4\Gamma Cxy + BB(x+y)^2$$
$$+ 4BCxy(x+y) + 4CCxxyy$$

siue

$$(4AA - \Gamma^2) + 2B(2A - \Gamma)(x+y) + 4(BB - \Gamma C)xy$$
$$+ 4AC(xx+yy) - B^2(x+y)^2 = 0.$$

§. 30. Quod si iam hanc aequationem rationalem cum formula *canonica*, qua olim sum vsus ad huiusmodi integrationes expediendas, comparemus, quae erat

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0,$$

dum scilicet loco $(x+y)^2$ scribamus $(xx+yy) + 2xy$, reperiemus fore

$$\alpha = 4AA - \Gamma^2;\ \beta = B(2A - \Gamma);\ \gamma = 4AC - B^2;$$
$$\delta = BB - 2\Gamma C.$$

§. 31. Alio vero insuper modo eandem aequationem differentialem propositam integrare poterimus, introducendo literam $q = x - y$; tum enim habebimus

$$\frac{2\,d\,dq}{dt^2} = X' - Y'.$$ At vero erit

$$X' - X' = 2\,C\,q + 3\,D\,q\,(x + y)$$

vbi iterum patet statui debere tam $D = 0$ quam $E = 0$, vt integratio, multiplicando per $dq$, succedat. Hoc autem notato erit integrale $\frac{dq^2}{dt^2} = \text{Const} + C\,q\,q$, ideoque

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{(\Delta + C\,q\,q)}.$$

§. 32. Cum igitur sit $\frac{dq}{dt} = \sqrt{X} - \sqrt{Y}$, hoc integrale ita erit expressum:

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = \sqrt{(\Delta + C\,q\,q)}$$

quae aequatio sumtis quadratis abit in hanc:

$$2\,A + B\,(x + y) + C\,(x\,x + y\,y) - 2\sqrt{X\,Y} = \Delta + C\,(x - y)^2$$ siue

$$2\,A + B\,(x + y) + 2\,C\,x\,y - 2\sqrt{X\,Y} = \Delta$$

vnde fit

$$2\sqrt{X\,Y} = 2\,A - \Delta + B\,(x + y) + 2\,C\,x\,y,$$

vbi si ponatur $2\,A - \Delta = -\,F$ aequatio ab ante inventa prorsus non discrepat.

§. 33. Quod si autem proposita fuisset aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2\,B\,x + C\,x\,x)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + 2\,B\,y + C\,y\,y)}} = 0,$$

integralia ante inuenta ad hunc casum referentur, si modo loco $\sqrt{Y}$ scribatur $-\sqrt{Y}$; vnde patet pro hoc casu haberi hanc aequationem:

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = \sqrt{(\Delta + 2\,B\,(x + y) + C\,(x + y)^2)}$$

vel

vel etiam

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{(\Delta + C(x-y)^2)}$$

§. 34. Hic singularis casus occurrit, quando formulae $A + Bx + Cxx$ sunt quadrata. Sit enim

$$X = (a + bx)^2 \text{ et } Y = (a + by)^2 \text{ ideoque}$$

$$A = a^2,\ B = 2ab,\ C = bb;$$

tum enim prior forma integralis erit

$$b(x-y) = \sqrt{(\Delta + 4ab(x+y) + bb(x+y)^2)}$$

sumtisque quadratis

$$-4bbxy = \Delta + 4ab(x+y), \text{ ideoque}$$

$$\Delta = a(x+y) + bxy$$

cuius aequationis differentiale est

$$a(dx + dy) + b(xdy + ydx) = 0 \text{ ideoque}$$

$$dx(a + by) + dy(a + bx) = 0.$$

Sin autem altera formula vtatur, erit

$$2a + b(x+y) = \sqrt{(\Delta + bb(x-y)^2)}$$

vnde quadratis sumtis, positoque $\Delta - 4aa = \Gamma$ prodit vt ante $\Gamma = a(x+y) + bxy$.

## Analysis

### Pro integranda aequatione

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

existente $X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4$ et $Y = A + By + Cyy + Dy^3 + Ey^4$.

§. 35. Introducto iterum elemento $dt$, vt fit

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{X} \text{ et } \frac{dy}{dt} = \sqrt{Y}$$

ideoque fumtis quadratis

$$\frac{dx^2}{dt^2} = X \text{ et } \frac{dy^2}{dt^2} = Y,$$

statuamus $x + y = p$ et $x - y = q$, et quia hinc prodit

$$dx^2 - dy^2 = dp\,dq, \text{ erit}$$

$$\frac{dp\,dq}{dt^2} = X - Y = B(x - y) + C(x^2 - y^2) + D(x^3 - y^3) + E(x^4 - y^4)$$

§. 36. Quoniam igitur est

$$x = \frac{p+q}{2} \text{ et } y = \frac{p-q}{2}$$

his valoribus introductis reperietur

$$X - Y = Bq + Cpq + \tfrac{1}{4}Dq(3pp + qq) + \tfrac{1}{2}Epq(pp + qq)$$

vnde per $q$ diuidendo oritur

$$\frac{dp\,dq}{q\,dt^2} = B + Cp + \tfrac{1}{4}D(3pp + qq) + \tfrac{1}{2}Epq(pp + qq).$$

§. 37. Nunc etiam formulas quadratas primo exhibitas differentiemus, et statuendo vt ante

$dX = X'dx$ et $dX = Y'dy$ habebimus

$\frac{2\,ddx}{dt^2} = X'$ et $\frac{2\,ddy}{dt^2} = Y'$, hincque addendo

$\frac{2\,ddp}{dt^2} = X' + Y'$. Cum vero fit

$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3 \text{ et}$$

$$Y' = B + 2Cy + 3Dyy + 4Ey^3$$

erit $X' + Y' = 2B + 2Cp + \tfrac{3}{2}D(pp + qq) + Ep(pp + 3qq)$.

ita

ita vt substituto hoc valore fiat

$$\frac{ddp}{dt^2} = B + Cp + \tfrac{3}{2}D(pp+qq) + \tfrac{1}{2}Ep(pp+3qq)$$

a qua aequatione si priorem $\frac{dpdq}{qdt^2}$ subtrahamus, remanebit sequens:

$$\frac{ddp}{dt^2} - \frac{dpdq}{qdt^2} = \tfrac{3}{2}Dqq + Epqq.$$

§. 38. Haec iam aequatio per $qq$ diuisa producit istam:

$$\frac{1}{dt^2}\left(\frac{ddp}{qq} - \frac{dpdq}{q^3}\right) = \tfrac{3}{2}D + Ep,$$

quae ducta in $2dp$ manifesto fit integrabilis: prodit enim

$$\frac{dp^2}{qqdt^2} = \Delta + Dp + Epp$$

ex qua radice extracta colligitur:

$$\frac{dp}{qdt} = \sqrt{(\Delta + Dp + Epp)}.$$

Cum igitur posuerimus

$$p = x+y \text{ et } q = x-y, \text{ erit } \frac{dp}{dt} = \sqrt{X} + \sqrt{Y},$$

vnde resultat haec aequatio integralis algebraica:

$$\frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{x-y} = \sqrt{(\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2)}$$

quae est ipsa forma ab illustri *la Grange* inuenta.

§. 39. Euoluamus vlterius hanc formam, ac sumtis quadratis erit

$$\frac{X+Y+2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta + D(x+y) + E(x+y)^2.$$

Est vero

$$X+Y = 2A + B(x+y) + C(xx+yy)$$
$$+ D(x^3+y^3) + E(x^4+y^4)$$

vnde si auferamus

$$(D(x+y) + E(x+y)^2)(x-y)^2$$

remanebit

$$2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy(x+y)$$
$$+ 2Exxyy,$$

quo substituto aequatio integralis erit

$$\frac{2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy(x+y) + 2Ex^2y^2 + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta$$

§. 40. Haec aequatio aliquanto concinnior reddi potest subtrahendo vtrinque C et statuendo $\Delta - C = \Gamma$: habebitur enim hoc facto

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Gamma$$

vnde deducimus

$$2\sqrt{XY} = \Gamma(x-y)^2 - 2A - B(x+y) - 2Cxy - Dxy(x+y) - 2Exxyy$$

siue ponendo

$$2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy = V$$

aequatio nostra erit

$2\sqrt{XY} = \Gamma(x-y)^2 - V$, quae sumtis quadratis abit in hanc:

$$4XY = \Gamma^2(x-y)^4 - 2\Gamma V(x-y)^2 + VV \text{ siue}$$

$$4XY - VV = \Gamma^2(x-y)^4 - 2\Gamma V(x-y)^2$$

§. 41. Facta nunc substitutione erit

$$\begin{aligned}4XY = {} & 4A^2 + 4AB(x+y) + 4AC(xx+yy) \\ & + 4AD(x^3+y^3) + 4AE(x^4+y^4) + 4BBxy \\ & + 4BCxy(x+y) + 4BDxy(xx+yy) \\ & + 4BExy(x^3+y^3) + 4CCxxyy \\ & + 4CDxxyy(x+y) + 4CExxyy(xx+yy) \\ & + 4DDx^3y^3 + 4DEx^3y^3(x+y) \\ & + 4EEx^4y^4.\end{aligned}$$

At vero porro colligitur fore

$$\begin{aligned}VV = {} & 4AA + 4AB(x+y) + 8ACxy \\ & + 4ADxy(x+y) + 8AExxyy + BB(x+y)^2\end{aligned}$$

+ 4 B

$$+4BCxy(x+y) + 2BDxy(x+y)^2$$
$$+4BE(x+y)xxyy + 4CCxxyy$$
$$+4CD(x+y)xxyy + 8CEx^3y^3$$
$$+DDxxyy(x+y)^2 + 4DEx^3y^3(x+y)$$
$$+4EEx^4y^4$$

§. 42. Quod si iam posteriorem formulam a priore subtrahamus et singulos terminos ordine analogos disponamus, reperiemus

$$\begin{aligned}4XY - VV = {} & 4AC(x-y)^2 + 4AD(x+y)(x-y)^2 \\ & + 4AE(x+y)^2(x-y)^2 - B^2(x-y)^2 \\ & + 2BDxy(x-y)^2 + 4BExy(x+y)(x-y)^2 \\ & + 4CExxyy(x-y)^2 - DDxxyy(x-y)^2\end{aligned}$$

quae expressio factorem habet communem $(x-y)^2$, per quem ergo si diuidamus perueniemus ad hanc aequationem concinniorem:

$$\begin{aligned}& 4AC + 4AD(x+y) + 4AE(x+y)^2 - BB \\ & + 2BDxy + 4BExy(x+y) + (4CE - DD)xxyy \\ = {} & \Gamma\Gamma(x-y)^2 - 4\Gamma A - 2\Gamma B(x+y) - 4\Gamma Cxy \\ & - 2\Gamma Dxy(x+y) - 4\Gamma Exxyy.\end{aligned}$$

§. 43. Transferamus nunc omnes terminos ad partem sinistram et loco $(x+y)^2$ scribamus $(xx+yy) + 2xy$, tum vero $(xx+yy) - 2xy$ loco $(x-y)^2$, quo facto talis oritur aequatio meae canonicae respondens:

$$0 = \begin{cases} 4AC + 4AD(x+y) + 4AE(x^2+y^2) + 2BDxy + 4BExy(x+y) + 4CExxyy \\ -BB + 2\Gamma C(x+y) - \Gamma\Gamma(x^2+y^2) + 8AExy + 2\Gamma Dxy(x+y) - DDxxyy \\ +4\Gamma A \qquad\qquad\qquad + 2\Gamma^2 xy \qquad\qquad + 4\Gamma Exxyy \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 4\Gamma Cxy \end{cases}$$

§. 44.

§. 44. Hinc ergo pro aequatione canonica literae graecae $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. per latinas A, B, C, D, E, vna cum constante $\Gamma$ sequenti modo determinantur:

$$\alpha = 4AC + 4\Gamma A - BB$$
$$\beta = 2AD + \Gamma B$$
$$\gamma = 4AE - \Gamma\Gamma$$
$$\delta = BD + 4AE + \Gamma^2 + 2\Gamma C$$
$$\varepsilon = 2BE + \Gamma D$$
$$\zeta = 4CE + 4\Gamma E - DD$$

ita vt aequatio canonica, qua olim sum vsus, sit

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy$$
$$+ 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy = 0.$$

§. 45. Haec autem aequatio integralis ad rationalitatem perducta latius patet quam aequatio proposita differentialis $\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$: simul enim complectitur integrale huius: $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$. Scilicet haec aequatio complectitur duos factores, quorum alteruter alterutri satisfacit. Ex genesi autem patet hanc aequationem esse productum ex his factoribus: $\Delta(x-y)^2 - V + 2\sqrt{XY}$, et $\Delta(x-y)^2 - V - 2\sqrt{XY}$.

§. 46. Supra iam obseruauimus, eiusdem aequationis differentialis integrale hoc quoque modo exhiberi posse: $\frac{M\sqrt{Y} + N\sqrt{X}}{(x-y)^3} = C$ (vide §. 8. et praec.) existente

$$M = 4A + B(3x+y) + 2C(xx+xy)$$
$$+ Dxx(x+3y) + 4Ex^3y$$
$$N = 4A + B(3y+x) + 2Cy(x+y)$$
$$+ Dyy(y+3x) + 4Exy^3$$

vbi

vbi notasse iuuabit esse

$$M+N=8A+4B(x+y)+2C(x+y)^2$$
$$+D(x+y)^3+4Exy(xx+yy)$$
$$M-N=2B(x-y)+2C(x+y)(x-y)$$
$$+D(x-y)(x^2+4xy+y^2)$$
$$+4Exy(x+y(x-y)$$

Interim tamen haud facile intelligitur, quomodo haec forma cum ante inuenta consentiat, dum tamen de consensu certi esse possumus.

§. 47. Ex iis, quae hactenus sunt allata, satis liquet, eandem aequationem integralem innumeris modis exhiberi posse, prout constans arbitraria alio atque alio modo repraesentatur; vnde plurimum intererit certam legem stabilire, secundum quam quouis casu constantem illam arbitrariam exprimere velimus. Hunc in finem ista regula obseruetur: vt perpetuo integralia ita capiantur, vt posito $y=0$ fiat $x=k$, hincque secundum legem compositionis $X=K$, existente

$$K=+A+Bk+Ckk+Dk^3+Ek^4$$

Hac enim lege obseruata omnia integralia, vtcunque diuersa videantur, ad perfectum consensum perduci poterunt. Hoc igitur modo quae hactenus inuenimus sequentibus Theorematibus complectamur.

## Theorema I.

§. 48. Si haec aequatio differentialis

$$\frac{dx}{a+bx+cxx}-\frac{dy}{a+by+cyy}=0,$$

ita integretur, vt posito $y=0$ fiat $x=k$, integrale ita se habebit:

$$\frac{2a+b(x+y)+2cxy}{x-y}=\frac{2a+bk}{k}.$$

## Theorema II.

§. 49. Si haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{a+bx+cxx}+\frac{dy}{a+by+cyy}=0$$

ita integretur, vt posito $y=0$ fiat $x=k$, integrale supra triplici modo est inuentum; erit enim:

I. $\frac{b+c(x+y)}{cxy-a}=-\frac{b+ck}{a}$;

II. $\frac{a(x+y)+bxy}{cxy-a}=-k$

III. $\frac{b+c(x+y)}{a(x+y)+bxy}=\frac{b+ck}{ak}$.

## Theorema III.

§. 50. Si haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}-\frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cyy)}}=0$$

ita integretur, vt posito $y=0$ fiat $x=k$, integrale erit

$$-B(x+y)-2Cxy+2\sqrt{(A+Bx+Cxx)}\sqrt{(A+By+Cyy)}=$$
$$-Bk+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)},\text{ siue}$$
$$B(k-x-y)-2Cxy=2\sqrt{A(A+Bk+Ckk}$$
$$-2\sqrt{(A+Bx+Cxx)(A+By+Cyy)}$$

## Corollarium.

§. 51. Hinc ergo patet, si aequatio differentialis proposita, fuerit ista:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cyy)}}=0,$$

eaque integretur ita, vt posito $y=0$ fiat $x=k$, integrale fore

$$B(k-x-y)-2Cxy=2\sqrt{(A+Bx+Cxx)}$$
$$\sqrt{(A+By+Cyy)}-2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}.$$

Theo-

# Theorema IV.

§. 52. Si posito br. gr.

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4$$
$$Y = A + By + Cyy + Dy^3 + Ey^4$$
$$K = A + Bk + Ckk + Dk^3 + Ek^4$$

haec proponetur aequatio differentialis: $\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, quae ita integrari debeat, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, eius integrale ita erit expressum:

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy + 2\sqrt{XY}}{(x+y)^2} = \frac{2A + Bk + 2\sqrt{AK}}{kk}.$$

Sin autem aequatio proposita fuerit

$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, eius integrale erit

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy - 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \frac{2A + Bk - 2\sqrt{Ak}}{kk}.$$

## Corollarium I.

§. 53. Quod si hic ponamus $D = 0$ et $E = 0$, casus oritur Theorematis tertii, pro aequatione

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cxx}} - \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cyy}} = 0,$$

cuius ergo integrale hinc erit

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + 2\sqrt{(A + Bx + Cxx)(A + By + Cyy)}}{(x-y)^2} = \frac{2A + Bk + 2\sqrt{A(A + Bk + Ckk)}}{kk},$$

quae forma si cum superiori comparetur, formulae irrationales eliminari poterunt. Quoniam enim ex priore est

$$2\sqrt{XY} = 2\sqrt{A(A + Bk + Ckk)} - B(k - x - y) + 2Cxy$$



erit

erit hoc integrale poſtremum

$$\frac{2A+B(2x+2y-k)+4Cxy+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk}}{(x-y)^2} =$$
$$\frac{2A+BK+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{kk}$$

vnde ſtatim deduci poteſt aequatio canonica

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0.$$

## Corollarium II.

§. 54. Ponamus nunc eſſe $A = 0$ et $B - 0$, vt ſit $X = xx(C+Dx+Exx)$ et $Y = yy(C+Dy+Eyy)$ et $K = kk(C+Dk+Ekk)$

aequatio differentialis integranda fiet

$$\frac{dx}{x\sqrt{(C+Dx+Exx)}} - \frac{dy}{y\sqrt{(C+Dy+Eyy)}} = 0,$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{xy(2C+D(x+y)+2Exy)+2xy\sqrt{(C+Dx+Exx)(C+Dy+Eyy)}}{(x-y)^2} = \Delta$$

atque hic conſtantem $\Delta$ per $k$ definire non licebit: poſitio enim $y = 0$ incongruum iam inuoluit. Interim tamen et haec integratio maxime eſt memoratu digna.

## Corollarium III.

§. 55. Quod ſi autem in hac poſtrema integratione loco $x$ et $y$ ſcribamus $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ primo aequatio differentialis erit

$$\frac{dy}{\sqrt{(Cyy+Dy+E)}} - \frac{dx}{\sqrt{(Cxx+Dx+E)}} = 0;$$

tum vero integrale ſequentem induet formam:

$$\frac{2Cxy+D(x+y)+2E+2\sqrt{(Cxx+Dx+E)(Cyy+Dy+E)}}{(y-x)^2} = \Delta$$
$$= \frac{Dk+2E+2\sqrt{E(Ckk+Dk+E)}}{kk}.$$

Si

Si igitur hic loco literarum E, D, C, ſcribamus A. B. C. prodibit aequatio differentialis ſupra tractata

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} - \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cyy)}} =$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+2\sqrt{(A+Bx+Cxx)(A+By+Cyy)}}{(x-y)^2} =$$

$$\frac{Bk+2A+2\sqrt{A}(A+Bk+Ckk)}{kk},$$

quae egregie conuenit cum ea in Coroll. I. data.

## Corollarium IV.

§. 56. Contemplemur nunc etiam caſum, quo formula $A+Bx+Cxx+Dx^3+Ex^4$ ſit quadratum, quod ſit $(a+bx+cxx)^2$, ita vt iam habeamus

$$A=aa,\ B=2ab,\ C=bb+2ac,\ D=2bc,\ E=cc,$$

tum vero

$$\sqrt{X}=a+bx+cxx,\ \sqrt{Y}=a+by+cyy,$$
$$\sqrt{K}=a+bk+ckk$$

atque aequatio differentialis pro priore caſu erit

$$\frac{dx}{a+bx+cxx} - \frac{dy}{a+by+cyy} = 0,$$

cuius ergo integrale erit

$$(2aa+2ab(x+y)+2(bb+2ac)xy+2bcxy(x+y)$$
$$+2ccxxyy+2(a+bx+cxx)(a+by+cyy)):$$
$$(x-y)^2 = \Delta,$$

quae reducitur ad

$$\frac{aa+ab(x+y)+(bb+ac)xy+bcxy(x+y)+ccxxyy}{(x-y)^2} =$$

$\frac{aa+abk}{kk}$. Quod ſi iam vtrinque addamus $\frac{1}{4}bb$, prodibit

$$\frac{(a+\frac{1}{2}b(x+y)+cxy)^2}{(x-y)^2} = \frac{(a+\frac{1}{2}bk)^2}{k^2}$$

 vnde

vnde extracta radice obtinetur forma integralis in theoremate primo assignata.

§. 57. Sin autem hoc modo alterum casum aequationis

$$\frac{dx}{a+bx+cxx} + \frac{dy}{a+by+cyy} = 0$$

euoluere velimus, peruenimus ad hanc aequationem:

$$\frac{2aa+2ab(x+y)+2(bb+2ac)xy+2bcxy(x+y)+2ccxxyy}{(x-y)^2}$$
$$-\frac{2(a+bx+cxx)(a+by+cyy)}{(x-y)^2} = \Delta,$$

quae euoluta praebet $\Delta = -2ac$, haecque aequatio manifesto est absurda, et nihil circa integrale quaesitum declarat, cuius rationem maximi momenti erit perscrutari.

## Insigne Paradoxon.

§. 58. Cum huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

integrale in genere inuentum sit

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+Dxy(x+y)+2Exxyy-2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta$$

casu autem, quo statuitur

$$\sqrt{X} = a+bx+cxx \text{ et } \sqrt{Y} = a+by+cyy$$

aequatio absurda inde oriatur, quaeritur enodatio huius insignis difficultatis ac praecipue modus, hinc verum integralis valorem inuestigandi.

## Enodatio Paradoxi.

§. 59. Quemadmodum scilicet in Analysi eiusmodi formulae occurrere solent, quae certis casibus indeterminatae atque adeo nihil plane significare videntur: ita hic

hic simile quid vsu venit, sed longe alio modo, cum neque ad fractionem, cuius numerator et denominator simul euanescunt, neque ad differentiam inter duo infinita perveniatur, quod exemplum eo magis est notatu dignum, quod non memini, similem casum mihi vnquam se obtulisse. Istud singulare phaenomenon se nimirum exerit, quando ambae formulae X et Y euadunt quadrata, ad quod ergo resoluendum ad simile artificium recurri oportet, quo formulae X et Y non ipsis quadratis aequales sed ab iis infinite parum discrepare assumuntur.

§. 60. Statuamus igitur

$$X = (a + bx + cxx)^2 + \alpha \text{ et } Y = (a + by + cyy)^2 + \alpha,$$

ita vt pro litteris maiusculis A, B, C, D, E, fiat $A = aa + \alpha$, $B = 2ab$, $C = 2ac + bb$, $D = 2bc$, $E = cc$, vbi $\alpha$ denotat quantitatem infinite paruam, deinceps nihilo aequalem ponendam. Hinc ergo si br. gr. ponamus

$$a + bx + cxx = R \text{ et } a + by + cyy = S \text{ erit}$$

$$\sqrt{X} = R + \frac{\alpha}{2R} \text{ et } \sqrt{Y} = S + \frac{\alpha}{2S}.$$

§. 61. Nunc igitur consideremus formam integralis primo inuentam, quae erat

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{(\Delta + D(x + y) + E(x + y)^2)}$$

pro qua igitur habebimus

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = R - S - \frac{\alpha(R - S)}{2RS}.$$

Quia vero hic erit

$$R - S = b(x - y) + c(xx - yy) \text{ fiet } \frac{R - S}{x - y} = b + c(x + y).$$

At posito br. gr. $x + y = p$ erit $\frac{R - S}{x - y} = b + cp$, vnde

aequa-

aequatio noſtra erit

$$b + cp - \frac{\alpha(b+cp)}{2RS} = \sqrt{\Delta + 2bcp + ccpp}.$$

§. 62. Sumantur nunc vtrinque quadrata et aequatio noſtra ſequentem induet formam: $bb - \frac{\alpha}{RS}(b+cp)^2 = \Delta$. Alteriores ſcilicet poteſtates ipſius $\alpha$ hic vbique praetermittuntur. Hic ergo ratio noſtri Paradoxi manifeſto in oculos incidit, quia poſito $\alpha = 0$ oritur $bb = \Delta$; vnde, vt $\Delta$ maneat conſtans arbitraria, euidens eſt, differentiam inter $bb$ et $\Delta$ etiam infinite paruam ſtatui debere; quam obrem ponamus $\Delta = bb - \alpha\Gamma$, ac obtinebitur iſta aequatio penitus determinata $\frac{(b+cp)^2}{RS} = \Gamma$, ſiue

$$(b + c(x+y))^2 = \Gamma(a + bx + cxx)(a + by + cyy)$$

quae forma non multum diſcrepat a formula ſupra inuenta.

§. 63. Haec quidem forma magis eſt complicata quam ſolutiones §§ 24 et ſeqq. inuentae: Sequenti autem artificio ad formam ſimpliciſſimam redigi poterit. Cum haec fractio $\frac{RS}{(b-cp)^2}$ debeat eſſe quantitas conſtans, ſit ea $= F$, vt eſſe debeat $F(cp+b)^2 = RS$, et quemadmodum hic poſuimus $x + y = p$, ponamus porro $xy = u$, fietque:

$$RS = aa + abp + ac(pp - 2u) + bbu + bcpu + ccuu$$

atque aequatio iam ſecundum poteſtates ipſius $p$ diſpoſita erit

$$\begin{aligned} F(cp+b)^2 = acpp &+ abp + aa \\ &+ bcpu + bbu \\ &\qquad - 2acu \\ &\qquad + ccuu \end{aligned}$$

vb

vbi primo vtrinque diuidamus, quatenus fieri potest, per $cp + b$, ac reperietur

$$F(cp + b) = ap + bu + \frac{(a - cu)^2}{cp + b}.$$

Diuidamus nunc porro per $cp + b$, quatenus fieri potest, ac fiet

$$F = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \frac{(a - cu)}{(cp + b)} + \frac{(a - cu)^2}{(cp + b)^2}.$$

§. 64. Hac forma inuenta, si statuamus

$\frac{a - cu}{cp + b} = V$, erit $F = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} . V + V V$.

Cum igitur ista expressio aequari debeat quantitati constanti, euidens est ipsam quantitatem V constantem esse debere, ita vt iam nostrum integrale reductum sit ad hanc formam:

$$\frac{a - cu}{cp + b} = \frac{a - cxy}{c(x + y) + b} = \text{Const.}$$

Subtrahamus vtrinque $\frac{a}{b}$

fietque $\frac{cxy + a(x + y)}{b + c(x + y)} = \text{Const.}$

quae forma per priorem diuisa producit hanc:

$$\frac{a(x + y) + cxy}{cxy - a} = \text{Const.}$$

quae formae conueniunt cum supra exhibitis.

## Theorema V.

§. 65. Si in genere haec ratio designandi adhibeatur: vt sit $Z = A + Bz + Czz + Dz^3 + Ez^4$, atque valor huius formulae integralis $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, ita sumtus vt euanescat posito $z = 0$, designetur hoc charactere $\Pi : z$; tum, vt fiat $\Pi : k = \Pi : x + \Pi : y$, necesse est vt inter quantitates $k$, $x$, $y$ ista relatio subsistat:

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy \mp 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \frac{2A + Bk \mp 2\sqrt{AK}}{kk}$$

cuius ratio ex superioribus est manifesta. Cum enim $k$ denotet quantitatem constantem erit

$$d.\Pi : x + d.\Pi : y = 0 \text{ siue } \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

cuius integrale modo ante vidimus ita exprimi:

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy \mp 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta.$$

Quare cum esse debeat $\Pi : x + \Pi : y = \Pi : k$, manifestum est posito $y = 0$ fieri debere $\Pi : x = \Pi : k$ ideoque $x = k$ vnde constans indefinita $\Delta$ eodem prorsus modo definitur, vti est exhibita.

## Corollarium I.

§. 66. Hinc si formulae $\Pi : x$ exprimat arcum cuiuspiam lineae curuae abscissae siue applicatae $Z$ respondentem, in hac curua omnes arcus eodem modo inter se comparare licebit, quo arcus circulares inter se comparantur, quandoquidem, propositis duobus arcubus $\Pi : x$ et $\Pi : y$, tertius arcus $\Pi : k$ semper exhiberi poterit vel summae vel differentiae eorum arcuum aequalis.

## Corollarium II.

§. 67. Ita si in hac forma $\Pi : k = \Pi : x + \Pi : y$ statuatur $y = x$, prodibit $\Pi : k = 2\,\Pi : x$; sicque arcus reperitur duplo alterius aequalis. At vero si in nostra forma faciamus $y = x$, tam numerator quam denominator in nihilum abeunt. Vt autem eius verum valorem eruamus, vtamur aequatione primum (§. 38.) inuenta:

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x-y} = \sqrt{(\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2)},$$

et iam in membro sinistro spectetur $y$ vt constans; ipsi $x$ vero valorem tribuamus infinite parum discrepantem, siue, quod eodem redit, loco numeratoris et denominatoris eorum differentialia substituantur, sumta sola $x$ variabili, hocque modo pro casu $y = x$ membrum sinistrum euadit $\frac{X'}{2\sqrt{X}}$, vbi est $X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3$. Nunc ergo sumtis quadratis habebitur:

$$\frac{X'X'}{4X} = \Delta + 2Dx + 4Exx,$$

existente $\Delta$ vt ante $= \frac{2A + Bk - 2\sqrt{A}k}{kk}$.

## Corollarium III.

§. 68. Verum sine his ambagibus duplicatio arcus ex altera forma $\Pi : k = \Pi : x - \Pi y$ deduci potest, ponendo $y = k$, siquidem hinc fit $\Pi : x = 2\Pi : k$, pro quo ergo casu relatio inter $x$ et $k$ hac aequatione exprimetur:

$$\frac{2A + B(k + x) + 2Ckx + Dkx(k + x) + 2Ekkxx + 2\sqrt{KX}}{(x - k)^2}$$
$$= \frac{2A + Bk + 2\sqrt{AK}}{kk}.$$

Facile autem patet quomodo hinc ad triplicationem, quadruplicationem et quamlibet multiplicationem arcuum progredi debeat, quod argumentum olim fusius sum tractatus.

## Theorema VI.

§. 69. Si in formis supra inuentis ponatur tam $B = 0$ quam $D = 0$, vt fit $X = A + Cxx + Ex^4$ et $Y = A + Cyy + Ey^4$ et $K = A + Ckk + Ek^4$; tum si ista aequatio $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$ ita integretur, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, tum aequatio integralis erit:

$$\frac{A + Cxy + Exxyy \mp \sqrt{XY}}{(x - y)^2} = \frac{A \mp \sqrt{AK}}{kk}.$$

## Corollarium I.

§. 70. Hic notari meretur, istum casum adhuc alio modo ex forma generali deduci posse, si scilicet sumatur $A = o$ et $E = o$, tum enim prodit ista aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(Bx + Cxx + Dx^3)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(By + Cyy + Dy^3)}} = o$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{2B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) \mp 2\sqrt{(Bx + Cxx + Dx^3)(By + Cyy + Dy^3)}}{(x-y)^2}$$

$= \frac{Bk}{kk} = \frac{B}{k}$, vbi valor constantis admodum simplex euasit. Nunc in his formilis loco $x$ et $y$ scribamus $xx$ et $yy$, at vero loco literarum B et D scribamus A et E, fietque aequatio differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}} = o$$

cuius ergo integrale etiam hoc modo exprimetur

$$\frac{A(xx+yy) + 2Cxxyy + Exxyy(xx+yy) \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx-yy)^2} = \frac{A}{kk}.$$

## Corollarium II.

§. 71. Ecce ergo hac ratione peruenimus ad aliam integralis formam non minus notabilem priore, atque adeo nunc ex earum combinatione formula radicalis $\sqrt{XY}$ eliminari poterit, quandoquidem ex posteriore fit

$$\mp 2\sqrt{XY} = \frac{A(xx-yy)^2}{kkxy} - \frac{A(xx+yy)}{xy} - 2Cxy$$
$$- Exy\,(xx+yy)$$

qui valor in priore substitutus conducit ad hanc aequationem rationalem:

$$2A + 2Cxy + 2Exxyy$$
$$+ \frac{A(xx-yy)^2}{kkxy} - \frac{A(xx+yy)}{xy} - 2Cxy - Exy(xx+yy)$$
$$= \frac{2A(x-y)^2}{kk} \mp \frac{2(x-y)^2\sqrt{AK}}{kk}$$

quae

quae porro reducta et per $(x-y)^2$ diuisa reuocatur ad hanc formam:

$$\frac{2\mathrm{A} \mp 2\sqrt{\mathrm{AK}}}{kk} = \frac{\mathrm{A}(x+y)^2}{kkxy} - \mathrm{E}xy - \frac{\mathrm{A}}{xy}$$

siue ad hanc:

$$\frac{\mathrm{A}}{kk}(xx+yy-kk) - \mathrm{E}xxyy \pm \frac{2xy\sqrt{\mathrm{AK}}}{kk} = 0$$

quae egregie conuenit cum aequatione canonica, qua olim sum vsus: scil.

$$0 = \alpha + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy$$

si quidem est

$$\alpha = -\frac{\mathrm{A}}{kk};\ \gamma = +\frac{\mathrm{A}}{kk};\ 2\delta = \pm\frac{2\sqrt{\mathrm{AK}}}{kk};\ \zeta = -\mathrm{E}$$

## Corollarium III.

§. 72. Methodo posteriore, qua hic vsi sumus ad hanc aequationem integrandam, aequatio multo generalior tractari poterit, vbi in formulis radicalibus potestates vsque ad sextam dimensionem assurgunt. Namque si tantum statuamus $\mathrm{A}=0$, vt sit aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{x(\mathrm{B}+\mathrm{C}x+\mathrm{D}xx+\mathrm{E}x^3)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y(\mathrm{B}+\mathrm{C}y+\mathrm{D}yy+\mathrm{E}y^3)}} = 0$$

eius integrale est

$$\frac{\mathrm{B}(x+y)+2\mathrm{C}xy+\mathrm{D}xy(x+y)+2\mathrm{E}xxyy}{(x-y)^2}$$
$$\mp\frac{2\sqrt{xy(\mathrm{B}+\mathrm{C}x+\mathrm{D}xx+\mathrm{E}x^3)(\mathrm{B}+\mathrm{C}y+\mathrm{D}yy+\mathrm{A}y^3)}}{(x-y)^2} = \frac{\mathrm{B}}{k}.$$

Quod si iam hic loco $x$ et $y$ scribamus $xx$ et $yy$, aequatio differentialis fiet

$$\frac{dx}{\sqrt{(\mathrm{B}+\mathrm{C}xx+\mathrm{D}x^4+\mathrm{E}x^6)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(\mathrm{B}+\mathrm{C}yy+\mathrm{D}y^4+\mathrm{E}y^6)}} = 0,$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{\mathrm{B}(xx+yy)+2\mathrm{C}xxyy+\mathrm{D}xxyy(xx+yy)+2\mathrm{E}x^4y^4}{(xx-yy)^2}$$
$$\mp\frac{2xy\sqrt{(\mathrm{B}+\mathrm{C}xx+\mathrm{D}x^4+\mathrm{E}x^6)(\mathrm{B}+\mathrm{C}yy+\mathrm{D}y^4+\mathrm{E}y^6)}}{(xx-yy)} = \frac{\mathrm{B}}{kk}.$$

Nunc autem ostendamus, quomodo ope methodi Illustris *de la Grange* idem integrale impetrari queat.



Analy-

## Analysis.

Pro integratione aequationis differentialis
$\frac{dx}{\surd X} \pm \frac{dy}{\surd Y} = 0$, existente $X = B + Cxx + Dx^4 + Ex^6$
$Y = B + Cyy + Dy^4 + Ey^6$

§. 73. Posito igitur
$\frac{dx}{\surd X} = dt$ erit $\frac{dy}{\surd Y} = \mp dt$.
hincque sumtis quadratis
$\frac{dx^2}{dt^2} = X$ et $\frac{dy^2}{dt^2} = Y$.
Hinc formentur hae aequationes:
$\frac{xxdx^2}{dt^2} = xxX$ et $\frac{yydy^2}{dt^2} = yyY$.
Iam introducantur duae nouae variabiles $p$ et $q$ vt sit $xx + yy = 2p$ et $xx - yy = 2q$, ex quo fit $xdx + ydy = dp$, hincque $xxdx^2 - yydy^2 = dpdq$; quam obrem habebimus
$\frac{dpdq}{dt^2} = xxX - yyY$,
quae aequatio diuidatur per $xx - yy = 2q$, prodibitque
$\frac{dpdq}{2qdt^2} = \frac{xxX - yyY}{xx - yy}$
quae forma, valoribus pro X et Y substitutis, dabit
$\frac{dpdq}{2qdt^2} = B + 2Cp + D(3pp + qq) + 4E(p^3 + pqq)$

§. 64. Nunc porro aequationes $\frac{dx^2}{dt^2}$ et $\frac{dy^2}{dt^2}$ differentiatae dabunt
$\frac{2ddx}{dt^2} = X'$ et $\frac{2ddy}{dt^2} = Y'$.
Ex priore fit $\frac{2xddx}{dt} = xX'$, cui addatur $\frac{2dx^2}{dt^2} = 2X$, vt prodeat
$\frac{2(xddx + dx^2)}{dt^2} = \frac{2d.xdx}{dt^2} = xX' + 2X$.

Simili

Simili modo erit $\frac{2\,d\,y\,d\,y}{d\,t^2} = y\,Y' + 2\,Y$, quae duae aequationes coniunctim additae dabunt

$$\frac{2\,d.\,dp}{dt^2} = \frac{2\,d\,d\,p}{d\,t^2} = x\,X' + y\,Y' + 2\,(X+Y).$$

Substitutis autem valoribus et facta substitutione respectu literarum $p$ et $q$ reperitur

$$2\,X + 2\,Y = 4\,B + 4\,C\,p + 4\,D\,(pp+qq) + 4\,E\,p\,(pp+3\,qq).$$

Deinde ob

$$X'\,x = 2\,C\,x\,x + 4\,D\,x^4 + 6\,E\,x^6 \text{ et}$$

$$y\,Y' = 2\,C\,y\,y + 4\,D\,y^4 + 6\,E\,y^6 \text{ erit}$$

$$x\,X' + y\,Y' = 4\,C\,p + 8\,D\,(pp+qq) + 12\,E\,p\,(pp+3\,qq)$$

ex quibus coniunctis fit

$$\frac{2\,d\,d\,p}{d\,t^2} = 4\,B + 8\,C\,p + 12\,D\,(pp+qq) + 16\,E\,p\,(pp+3\,qq).$$

§. 75. Ab hac formula subtrahatur supra inuenta $\frac{d\,p\,d\,q}{2\,q\,d\,t^2}$ quater sumta, ac remanebit

$$\frac{2\,d\,d\,p}{d\,t^2} - \frac{2\,d\,p\,d\,q}{q\,d\,t^2} = 8\,D\,q\,q + 32\,E\,p\,q\,q.$$

Nunc vtrinque multiplicetur per $\frac{dp}{qq}$ et prodibit

$$\frac{1}{dt^2}\left(\frac{2\,dp\,d\,dp}{qq} - \frac{2\,dp^2\,dq}{q^3}\right) = 8\,D\,dp + 32\,E\,p\,dp$$

cuius integrale sponte se offert ita expressum

$$\frac{dp^2}{qq\,dt^2} = 4\,\Delta + 8\,D\,p + 16\,E\,pp$$

ideoque extracta radice

$$\frac{dp}{q\,dt} = 2\,\sqrt{\Delta + 2\,D\,p + 4\,E\,pp}.$$

§. 76. Cum nunc sit

$$\frac{dp}{dt} = x\,\sqrt{X} + y\,\sqrt{Y} \text{ et } 2\,q = x\,x - y\,y$$

facta substitutione orietur haec aequatio:

$$\frac{x\,\sqrt{X} + y\,\sqrt{Y}}{xx - yy} = \sqrt{(\Delta + D'\,(x\,x+y\,y) + E\,(xx+yy)^2)}$$

quae

quae sumtis quadratis reducetur ad istam formam:

$$\frac{xxX+yyY\mp 2xy\surd XY}{(xx-yy)^2}=\Delta+D(xx+yy)$$
$$+E(xx+yy)^2.$$

Est vero

$$xxX+yyY=B(xx+yy)+C(x^4+y^4)$$
$$+D(x^6+y^6)+E(x^8+y^8)$$

hincque peruenietur ad hanc aequationem

$$\frac{B(xx+yy)+C(x^4+y^4)+Dxxyy(xx+yy)+2Ex^4y^4\mp 2xy\surd XY}{(xx-yy)^2}=\Delta.$$

§. 77. Sumamus nunc vt supra constantem $\Delta$ ita vt posito

$$y=0 \text{ fiat } x=k \text{ et } X=K=B+Ckk+Dk^4 Ek^6$$

et aequatio integralis induet hanc formam:

$$\frac{B(xx+yy)+C(x^4+y^4)+Dxxyy(xx+yy)+2Ex^4y^4\mp 2xy\surd XY}{(xx-yy)^2}=$$

$\frac{B+Ckk}{kk}$, quae aliquanto simplicior euadit si vtrinque subtrahamus C: erit enim

$$\frac{B(xx+yy)+2Cxxyy+Dxxyy(xx+yy)+2Ex^4y^4\mp 2xy\surd XY}{(x^2-y^2)^2}=\frac{B}{kk}$$

quae egregie conuenit cum integrali supra §. 72. exhibito.

§. 78. Hic casus notatu dignus se offert, dum $B=0$, tum autem aequatio differentialis ita se habebit:

$$\frac{dx}{x\surd(C+Dxx+Ex^4)}\pm\frac{dy}{y\surd(C+Dyy+Ey^4)}=0$$

cuius ergo integrale per constantem $\Delta$ expressum erit

$$\frac{C(x^4+y^4)+Dxxyy(xx+yy)+2Ex^4y^4\mp 2xy\surd XY}{(xx-yy)^2}=\Delta.$$

Hoc autem casu integratio non ita determinari potest, vt posito $y=0$ fiat $x=k$; quia integrale posterioris membri hoc casu manifesto abit in infinitum; quam obrem alio

alio modo integrationem determinari conueniet veluti vt posito $y = b$ fiat $x = a$, tum autem erit ista constans

$$\Delta = \frac{C(a^4 + b^4) + D a^2 b^2 (aa + bb) + 2 E a^4 b^4 \mp 2 ab \sqrt{AB}}{(aa - bb)^2}$$

existente

$$A = C + D aa + E a^4 \text{ et } B = C + D bb + E b^4.$$

## Conclusio.

§. 79. Qui processum Analyseos hic vsitatae comparare voluerit cum methodo, qua Illustris D. *de la Grange* vsus est in *Miscellan. Taur. Tom. IV.* facile perspiciet, eam multo facilius ad scopum desideratum perducere atque multo commodius ad quosuis casus applicari posse. Introduxerat autem Vir. Ill. in calculum formulam $\frac{dt}{T}$, cuius loco hic simplici elemento $dt$ sumus vsi, ac deinceps quantitatem T tanquam functionem literarum $p$ et $q$ spectauit, quae positio satis difficiles calculos postulauit, dum nostra methodo longe concinnius easdem integrationes inuestigare licuit. Quanquam autem nullum est dubium, quin ista Analyseos species insigne incrementum polliceatur, tamen nondum patet, quemadmodum ad alias integrationes ea accommodari queat, praeter hos ipsos casus, quos hic tractauimus et quos olim ex aequatione canonica deriuaueram.

# DE REDUCTIONE FORMULARUM INTEGRALIUM AD RECTIFICATIONEM ELLIPSEOS ET HYPERBOLAE.

Auctore

*A. LEXELL.*

§. 1.

Ex eo tempore quo Illuftris *Newtonus* formulas differentiales, quarum integratio per quadraturam circuli vel hyperbolae aequilaterae abfoluitur, contemplatus eft; primus qui hoc negotium vlterius profequendo, formulas quoque differentiales ad rectificationem Ellipfeos et Hyperbolae reducibiles, examinare inftituit, Celebris erat Anglorum Mathematicus *Colin Maclaurin*, quippe qui in II Volumine fui Tractatus de doctrina Fluxionum, nonnulla fpecimina talium formularum differentialium attulit. Quum vero maxime fpecialia effent, quae docuerat Maclaurin, Illuftris *d'Alembert* operae pretium duxit, hanc doctrinam vlterius perficere, quod inftitutum deinceps Illuftris quoque *Eulerus* in quibusdam de hoc argumento Differtationibus (Nouor. Comment. Tom. VIII et X.) ita profecutus eft, vt vix quidquam ad Ipfius inuenta addi poffe videatur. Nec igitur ifta, quae hac occafione proponere conftitui, fi refpectus habeatur conclufionum inventarum, prorfus noua funt; quin potius omnes reductiones heic tradendae in Differtatione Illuftris *Euleri* Tom. X. Nou. Comment. inferta, iam habeantur expofitae; quum

quum vero Methodus, qua ad has reductiones perductus sum, ab illa, qua Illustris *Eulerus* vsus est, prorsus sit diuersa, et vt spero nonnulla non prorsus contemnenda Analyseos specimina exhibeat, nec Geometris prorsus ingratum fore confido, si ea quae hoc de argumento meditatus sum, succincte exposuero.

§. 2. Formula igitur differentialis, quam heic imprimis mihi considerandam proposui, ista est $\frac{dz\sqrt{(1+mzz)}}{\sqrt{(1+nzz)}}$, quae re bene perpensa, omnino cum illa, quam Illustris *Eulerus* Tom. X. Comment. contemplatus est, congruere inuenitur. Licet enim formula Illustris *Euleri* $dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ latius patere videatur, tamen facile colligitur eandem ad nostram formulam reduci, si ita supponatur expressa:

$$dz\sqrt{\frac{f}{g}}.\sqrt{\frac{1+\frac{g}{f}zz}{1+\frac{k}{h}zz}};$$

nam ponendo $\frac{g}{f}=m$, et $\frac{k}{h}=n$, emerget nostra formula per $\sqrt{\frac{f}{g}}$ multiplicata. Patet igitur nostram formulam aeque late patere ac illam Illustris *Euleri*, quare quum calculus eo facilior euadat, quo minor adhibeatur numerus quantitatum, nostrae formulae continuo vsum adhibebimus, vbi tamen formulae istae propositae hanc alteram adiungere necesse est: $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$, his enim duabus expressionibus, omnes casus formularum differentialium infra contemplandi, continentur.

§. 3. Perfecta enumeratio horum casuum ipsam quidem, reductionem formularum differentialium iam sup-

 ponit,

ponit; interim tamen quum ad ea, quae infra tradentur, melius intelligenda, multum conducat, si enumeratio horum casuum ob oculos ponatur, eam heic statim exponere, animus est. Primum itaque casus heic contemplandi, eo inter se differunt, quod in expressionis denominatore occurrat, vel $\sqrt{(1+nz^2)}$, vel $\sqrt{(1-nz^2)}$, vel $\sqrt{(nz^2-1)}$. Ex prima hypothesi pro ratione signi, quo littera $m$ afficitur, sequentes resultant formulae:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}};\quad dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1+nzz}};\quad dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1+nzz}}.$$

Secunda hypothesis, pro diuerso signo quantitatis $m$ sequentes suppeditat formulas:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1-nzz}};\quad dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}};\quad dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1-nzz}}.$$

Denique ex tertia Hypothesi hi sequentes emergunt casus:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}};\quad dz\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}};\quad dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}.$$

Tum vero pro singulis his formulis, binae habentur positiones $n > m$ vel $m > n$, exceptis tamen formulis:

$$dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1-nzz}} \text{ et } dz\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}},$$

nam pro priori earum, necessario est $m > n$ et pro secunda $n > m$, quippe quum alioquin imaginaria in nostras formulas inducerentur. Nam si pro priori esse posset $n > m$, posita $1-nzz$ quantitate positiua, esse deberet $nzz-1$, negatiuum, ideoque tanto magis $mzz-1$ valorem consequeretur negatiuum, vnde necessum est, vt fieret $\sqrt{\frac{mzz-1}{1-nzz}}$ imaginarium. Simili quoque ratione demonstratur, non fieri posse, vt sit in expressione

$$\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}},\ m > n.$$

§. 4. Nunc igitur hinc sequentes casus formularum differentialium emergunt:

I. $dz$

I. $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$, posito $n > m$.

II. $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$, posito $n < m$.

III. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1+nzz}}$, sine vlla restrictione, vti ex infra dicendis patebit.

IV. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1+nzz}}$, sine vlla restrictione.

V. $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1-nzz}}$, sine vlla restrictione.

VI. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}}$, si sit $n > m$.

VII. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}}$, si sit $m > n$.

VIII. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1-nzz}}$, vbi necessario $m > n$.

IX. $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$, sine vlla limitatione.

X. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}}$, vbi necessario $n > m$.

XI. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}$, si sit $n > m$.

XII. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}$, si sit $m > n$.

Formulae etenim pro quibus diuersitas casuum $n \lessgtr m$ nihil mutare censenda est, ita comparatae sunt, vt pro vtroque horum casuum reductio eodem modo fiat; cum contra vbi positiones $n > m$ vel $n < m$, ad diuersas perducere censentur conclusiones, formulae differentiales ad rectificationes sectionum conicarum, diuersis plane rationibus reducantur. Sic ex: causa, formula $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}}$ reducitur ad rectificationem Ellipseos, si fuerit $n > m$, ad rectificationem vero Hyperbolae, si sit $m > n$. At formulae $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1+nzz}}$ integrale semper et omni casu, praeter quantitatem algebraicam, binos arcus sectionum conicarum, Ellipseos vnum, alterum Hyperbolae, inuoluit.

§. 5. Quum igitur nunc reductionem formulae differentialis $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$ ad rectificationem Ellipseos et Hyperbolae ostensuri simus, primum quidem et ante omnia formulam tradere conueniet, qua arcus quipiam harum Sectionum Conicarum exprimitur. Ponamus igitur esse BLD sectionem quandam Conicam, cuius axis est BFA, foco existente in F, tumque si ad punctum quodpiam D huius sectionis ducatur linea recta FD, eiusque valor per $v$ indicetur, valore anguli BFD per $\Phi$ expresso, aequatio pro Sectione Conica relationem harum quantitatum $v$ et $\Phi$ exprimens, ita erit comparata: $v = \frac{b}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}$, indigitante scilicet $b$ semiparametrum Sectionis Conicae et $e$ ipsius excentricitatem. Hinc si arcus sectionis conicae BD, per $s$ exprimatur, facile perspicitur fore: $ds = \sqrt{(dv^2 + v^2 d\Phi^2)}$, quare quum sit:

Tab. I. Fig. 5.

$$dv = \frac{be\,d\Phi.\,\text{fin.}\,\Phi}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2} \text{ et } v\,d\Phi = \frac{b\,d\Phi}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}, \text{ fiet}$$

$$ds^2 = d\Phi^2\left(\frac{b^2 e^2\,\text{fin.}\,\Phi^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^4} + \frac{b^2\,d\Phi^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}\right)$$

$$= \frac{b^2\,d\Phi^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^4}(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2),$$

ideoque

$$ds = \frac{b\,d\Phi}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}\sqrt{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)}.$$

Haecque illa est expressio pro arcu Sectionis Conicae, cuius potissimum vsum in sequentibus faciemus. Caeterum facile perspicitur, pro negotio praesenti, statim valorem semiparametri vnitati poni posse aequalem, ita vt vnica quantitas, qua in nostra formula, species Sectionis Conicae definiatur, sola remaneat excentricitas. Et quidem si fuerit $e < 1$, Sectio Conica erit ellipsis, sin vero $e > 1$, ista Sectio erit Hyperbola, tumque si $e = 1$, in Parabolam abibit, pro qua igitur habebitur:

ds

$$ds = d\Phi \frac{\sqrt{2(1+\text{cof.}\,\Phi)}}{(1+\text{cof.}\,\Phi)^2} = \frac{d\Phi}{2\,\text{cof.}\,\frac{1}{2}\Phi^3}.$$

Integralibus autem fumtis fiet:

$$s = \tfrac{1}{2}\frac{\text{fin.}\,\frac{1}{2}\Phi}{\text{cof.}\,\frac{1}{2}\Phi^2} + \tfrac{1}{2}\,L\left(\frac{\text{cof.}\,\frac{1}{2}\Phi}{1-\text{fin.}\,\frac{1}{2}\Phi}\right),$$

ex quo id confirmatur, quod aliunde quoque conftat, arcum Parabolae partim per quantitatem algebraicam, partim etiam per Logarithmum exprimi.

§. 6. Quum id in noftra disquifitione agatur, vt formula $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$ ad iftam formulam praefcriptam $d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}$ reducatur, fiue etiam huic formulae, vna cum quantitate quapiam algebraica aequalis fiat; facile liquet id negotium perfici, dum pro $z$ idonea quaedam adhibeatur fubftitutio. Ipfa autem rei natura declarat, idoneas fubftitutiones pro $z$ illas effe, quibus $z$ ftatuitur fiue directe, feu inuerfe proportionalis cuipiam harum fractionum:

$$\frac{\text{fin.}\,\Phi}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi};\ \frac{\text{fin.}\,\Phi}{e+\text{cof.}\,\Phi};\ \frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi};\ \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{\text{fin.}\,\Phi};$$
$$\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi};\ \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{e+\text{cof.}\,\Phi}.$$

Quare quum in fequentibus, huiusmodi expreffionum differentialium vfum adhibere neceffe fit, vt res in compendium redigatur, nunc ftatim illa differentialia fequenti fchemate repraefentare licebit:

$$\text{I. } d.\frac{\text{fin.}\,\Phi}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi} = \frac{d\Phi(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2};$$

$$\text{II. } d.\frac{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi} = -\frac{d\Phi(e+\text{cof.}\,\Phi)}{\text{fin.}\,\Phi^2};$$

III. d.

$$\text{III. } d.\frac{\text{fin.}\,\Phi}{e+\text{cof.}\,\Phi}=\frac{d\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^2};$$

$$\text{IV. } d.\frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi}=-\frac{d\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{\text{fin.}\,\Phi^2};$$

$$\text{V. } d.\frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}=\frac{(e^2-1)\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2};$$

$$\text{VI. } d.\frac{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}{e+\text{cof.}\,\Phi}=\frac{(1-e^2)\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^2};$$

$$\text{VII. } d.\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{\text{fin.}\,\Phi}=-\frac{d\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)(e+\text{cof.}\,\Phi)}{\text{fin.}\,\Phi^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}};$$

$$\text{VIII. } d.\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}=\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}};$$

$$\text{IX. } d.\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{e+\text{cof.}\,\Phi}=\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}};$$

$$\text{X. } d.\frac{\text{fin.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}=\frac{d\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{XI. } d.\frac{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}=-\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{XII. } d.\frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}=-\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 7. Quum in ſuperioribus allata ſit formula pro arcu ſectionis conicae, ad quam igitur reducitur iſtud differentiale propoſitum, quoties per ſolum arcum Ellipſeos vel Hyperbolae exprimi poteſt, nunc etiam e re erit, vt oſtendamus, quomodo ſe habeant formulae, ad quas iſtud diffe-

differentiale reducitur, quoties fue quantitati algebraicae et arcui Sectionis conicae, feu etiam quantitati algebraicae et binis arcubus Sectionum Conicarum aequetur. Facile autem coniectura affequi licuit, quantitatem iftam algebraicam, quae heic in cenfum venit, vnam fore harum quatuor fractionum:

$$\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)},\quad \frac{(e+\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi(1+e\cos.\Phi)},$$

$$\frac{\sin.\Phi(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},\quad \frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)},$$

quo fuppofito, ad fequentia deducti fumus Theoremata:

$$\text{(I.)}\ \int\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} = \frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} - \int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}.$$

Eft enim

$$d.\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e+\cos.\Phi)}\,d.\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi} + \frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}\,d.\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi}$$

$$= \frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

ex quo patet propofitum.

§. 8. Theorema autem (II.) ita fe habet:

$$\int\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} = \frac{(e+\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e^2-1)(1+e\cos.\Phi)\sin.\Phi} + \frac{1}{e^2-1}\int\frac{d\Phi(e+\cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}.$$

Eft enim

$$d.\frac{(e+\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi(1+e\cos.\Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi}\,d.\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi} + \frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}\,d.\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi}$$

$$= \frac{(e^2-1)d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} - \frac{d\Phi(e+\cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

hinc fumtis integralibus, colligitur aequalitas Theoremate propofita. Vlterius procedendo Theorema (III.) erit:

 $\int d\Phi$

$$\int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2} = \frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$-\frac{1}{e^2-1}\int \frac{d\Phi\,(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}.\ \text{Nam}\ d.\frac{\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$= \frac{\text{fin.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}\, d.\frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi} + \frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}\, d.\frac{\text{fin.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$= \frac{(e^2-1)\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}} + \frac{d\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

hinc fit

$$\frac{e^2}{e^2-1}\, d.\frac{\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}} = \frac{e^2\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$+\frac{e^2}{e^2-1}\cdot\frac{d\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},\ \text{ideoque}$$

$$\frac{e^2}{e^2-1}\, d.\frac{\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$-\frac{1}{e^2-1}\cdot\frac{d\Phi\,(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^2\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$+\frac{d\Phi}{e^2-1}\cdot\frac{(e^2(e+\text{cof.}\,\Phi)^2-(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2)}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^2\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$+\frac{d\Phi}{e^2-1}\cdot\frac{(e^4+2e^3\,\text{cof.}\,\Phi-1-2e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^2\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}} + \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$= \frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}.$$

§. 9.

§. 9. Denique Theorema nostrum (IV.) sequenti ratione habetur expressum:

$$e^2 \int \frac{d\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \int \frac{d\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(e+\cos.\Phi)^2}$$
$$= \frac{e^2 \sin.\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} + \int \frac{d\Phi (1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2 \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)},$$

quod sequenti ratione demonstratur,

$$d.\frac{\sin.\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} = \frac{\surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{e+\cos.\Phi}\, d.\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}$$
$$+ \frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}\, d.\frac{\surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{e+\cos.\Phi},\ \text{hinc}$$
$$e^2\, d.\frac{\sin.\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} = e^2\, d\Phi \frac{\surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(1+e\cos.\Phi)^2}$$
$$+ \frac{e^2\, d\Phi \sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2 \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}.$$

Porro habetur

$$\frac{d\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(e+\cos.\Phi)^2} - \frac{e^2\, d\Phi \sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2 \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}$$
$$= \frac{d\Phi (1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2 \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)},\ \text{hinc}$$
$$\frac{d\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(e+\cos.\Phi)^2} = \frac{e^2\, d\Phi \sin.\Phi^2 + d\Phi (1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2 \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}\ \text{et}$$
$$\frac{e^2\, d\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \frac{d\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(e+\cos.\Phi)^2}$$
$$= \frac{e^2\, d\Phi \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \frac{e^2\, d\Phi \sin.\Phi^2 + d\Phi (1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2 \surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)},$$

vnde veritas nostrae propositionis omnino est manifesta.

§. 10. His igitur praemissis, iam ipsum negotium adgredi licebit, vbi quidem primum dispiciendum est, quomodo differentiale $dz \surd \frac{1+mzz}{1+nzz}$ comparatum esse oportet, vt ad formulam $d\Phi \surd \frac{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(1+e\cos.\Phi)^2}$ reductionem admittat. Breuitatis autem gratia in differentiali proposito, loco numeratoris $\surd (1 \pm mzz)$ vel $\surd (mzz-1)$ litteram $Z$ adhibebimus et pro denominatore $\surd (1 \pm nzz)$ vel $\surd (nzz-1)$ littera $Z'$ in vsum vocetur, quare pro casu praesenti dum differentiale $dz.\frac{Z}{Z'}$ ad formam

$$d\Phi \frac{\surd (1+2e\cos.\Phi+e^2)}{1+e\cos.\Phi}$$

 redu-

[illegible]dum eſt, id agitur vt pro $z$ idoneae adhibeantur ſubſtitutiones. Quare quum in denominatore formulae propoſitae occurrat $(1 + e \cos. \Phi)^2$, facile colligitur pro $z$ eiusmodi adhibendam eſſe fractionem, in cuius denominatore etiam occurrit $1 + e \cos. \Phi$, vnde anſa nobis ſuppeditatur, ſtatuendi ſiue

$$z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}, \text{ ſiue } z = \frac{\lambda (e + \cos. \Phi)}{1 + e \cos. \Phi},$$

nam de ſubſtitutione

$$z = \frac{\lambda \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{1 + e \cos. \Phi}$$

infra videbimus, eam non ſuccedere.

§. 11. Ponamus igitur primum $x = \frac{\lambda \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$, ex quo fiet $d z = \frac{\lambda d \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$, tumque vt differentiale $d z$, $\frac{Z}{Z'}$, formam adipiſcatur

$$d \Phi \frac{\surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

facile colligitur neceſſe eſſe, vt ſit

$$Z = \frac{\surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{1 + e \cos. \Phi} \text{ et } Z' = \frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}.$$

Patet igitur heic pro Z non aliam quam hanc expreſſionem $\surd (1 + m z z)$ valere, nam

$$1 - m z z = \frac{1 + 2 e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2 - m \lambda^2 \sin. \Phi^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

nullo modo ad iſtam formam

$$\frac{1 + 2 e \cos. \Phi + e^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$$

reduci poteſt, quod idem quoque valet de $m z z - 1$. Erit itaque

$$1 + m z z = \frac{[illegible]}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$$

$$= \frac{1 + 2 e \cos. \Phi + e^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

poſito $m \lambda^2 = e^2$, ſiue $\lambda = \frac{e}{\surd m}$, tum vero conſequimur

$Z' =$

$$Z' = \sqrt{(1 \pm nzz)} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi + e^2\cos.\Phi^2 \pm \frac{ne^2}{m}\sin.\Phi^2)}}{1+e\cos.\Phi}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 \pm \frac{ne^2}{m} + 2e\cos.\Phi + (e^2 \mp \frac{ne^2}{m})\cos.\Phi^2)}}{1+e\cos.\Phi};$$

ideoque si fuerit

$$1 \pm \frac{ne^2}{m} = e^2, \text{ siue } e^2 = \frac{m}{m \mp n},$$

obtinebimus

$$Z' = \frac{\sqrt{(e^2 + 2e\cos.\Phi + \cos.\Phi^2)}}{1+e\cos.\Phi} = \frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}.$$

Hincque fiet

$$dz\frac{Z}{Z'} = \lambda\, d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}$$

$$= \frac{e}{\sqrt{m}}\, d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2},$$

vbi est

$$Z = \sqrt{(1+mzz)} \text{ et } Z' = \sqrt{(1 \pm nzz)}.$$

Si $n$ positiuum habeat valorem, necessum est vt sit $m > n$, nam alioquin valor ipsius $e$ fieret imaginarius, ideoque illo enim casu $e > 1$, hincque differentiale $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$ posito $m > n$, erit pro arcu Hyperbolico, qui est casus II. §. 4. allatus. At vero si $n$ negatiuo afficiatur signo, fiet $e$ omni casu reale et quidem $< 1$, ideoque differentiale $\sqrt{\frac{1+mzz}{1-nzz}}$ semper et omni casu per rectificationem arcus Elliptici exprimetur, vnde formula nostra V. §. 4. allata emergit. Caeterum sponte intelligitur casu praesenti pro $Z'$ nequaquam $\sqrt{(nzz-1)}$ adhiberi posse, quippe quod fieret

$$= \frac{\sqrt{(n\lambda^2\sin.\Phi^2 - 1 - 2e\cos.\Phi - e^2\cos.\Phi^2)}}{1+e\cos.\Phi},$$

ideoque nulla ratione ad formam

$\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}$ reduci posset.

§. 12. Nunc vero denuo ſtatuamus $z = \frac{\lambda(e + \cos.\Phi)}{1 + e\cos.\Phi}$, vnde obtinebimus $dz = \lambda(e^2 - 1)\frac{d\Phi \sin.\Phi}{(1 + e\cos.\Phi)^2}$, hincque vt differentiale propoſitum ad formam $d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}{(1 + e\cos.\Phi)^2}$ reducatur, neceſſum eſt vt ſit:

$$Z = \mu \frac{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}{1 + e\cos.\Phi} \text{ et } Z' = \frac{\mu \sin.\Phi}{1 + e\cos.\Phi}.$$

Heic autem patet pro denominatore non adhiberi poſſe, niſi has binas formas:

$$Z' = \sqrt{(1 - nz^2)}, \text{ vel } Z' = \sqrt{(nzz - 1)},$$

ſiquidem

$$1 + nzz = \frac{1 + 2e\cos.\Phi + e^2\cos.\Phi^2 + n\lambda^2(e^2 + 2e\cos.\Phi + e^2)}{(1 + e\cos.\Phi)^2},$$

nullo modo ad formam $\frac{\sin.\Phi^2}{(1 + e\cos.\Phi)^2}$, ſe reduci patiatur. Habebimus, itaque

$$1 - nzz = \frac{1 + 2e\cos.\Phi + e^2\cos.\Phi^2 - n\lambda^2(e^2 + 2e\cos.\Phi + \cos.\Phi^2)}{(1 + e\cos.\Phi)^2}$$

$$= \frac{(1 - e^2)\sin.\Phi^2}{(1 + e\cos.\Phi)^2},$$

ſi nimirum ponatur $n\lambda^2 = 1$, ſiue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$, tum vero viciſſim erit

$$nzz - 1 = \frac{(e^2 - 1)\sin.\Phi^2}{(1 + e\cos.\Phi)^2}.$$

Pro numeratore autem $Z$ adhiberi debet vel $1 - mzz$, vel $mzz - 1$, priori caſu eſt

$$1 - mzz = \frac{1 + 2e\cos.\Phi + e^2\cos.\Phi^2 - \frac{m}{n}(e^2 + 2e\cos.\Phi + \cos.\Phi^2)}{(1 + e\cos.\Phi)^2},$$

vbi ſi ſtatuatur $\frac{m}{n} = e^2$ fiet

$$1 - mzz = \frac{1 - e^4 + 2e\cos.\Phi(1 - e^2)}{(1 + e\cos.\Phi)^2} = (1 - e^2)\frac{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}{(1 + e\cos.\Phi)^2},$$

ſimilique ratione erit

$$mzz - 1 = (e^2 - 1)\frac{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}{(1 + e\cos.\Phi)^2},$$

vbi quidem mox liquet pro ſuppoſitione $1 - nzz$, adhibendum

esse $1 - mzz$, et viciſſim adhibito $nzz - 1$, in vſum vocari debere $mzz - 1$, niſi calculum quantitatibus imaginariis implicare velimus. Hinc itaque ſequentes binae oriuntur aequalitates:

$$dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}} = \frac{e^2-1}{\sqrt{n}}\, d\Phi\, \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} \text{ et}$$

$$dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}} = \frac{e^2-1}{\sqrt{n}}\, d\Phi\, \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}.$$

In priori caſu eſt $n > m$, ideoque $e < 1$, vnde arcus ſectionis conicae erit ellipticus, nec heic poni poteſt $m > n$, quippe quum tunc eſſet $1 - mz^2 < 1 - nzz$, ideoque eſſe deberet $1 + 2e\cos.\Phi + e^2 < \sin.\Phi^2$, quod fieri nequit, ob $\cos.\Phi^2 + 2e\cos.\Phi + e^2 > 0$. Poſteriori caſu eſt $m > n$, hinc $e > 1$, et arcus hyperbolicus, nam ſi ſtatueretur $n > m$, fieret $mzz - 1 < nzz - 1$, ideoque iterum

$$1 + 2e\cos.\Phi + e^2 < \sin.\Phi^2,$$

quod fieri nequit. Prior igitur horum caſuum is eſt, qui §. 4. No. VI. deſignatur, poſterior vero is, qui ſub No. XII. occurrit, et hi quidem quatuor caſus formulae noſtrae differentialis modo allati, ii ſunt, quorum integratio non niſi vnicum arcum ſectionis conicae, ſiue Ellipticum, ſeu Hyperbolicum ſupponit.

§. 13. Si ſubſtitutionem,

$$z = \frac{\lambda\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{1+e\cos.\Phi}$$

tentare vellemus, ob

$$dz = \frac{\lambda\, d\Phi \sin.\Phi\,(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}, \text{ eſſe deberet } \frac{z}{z'}$$

$$= \frac{1+2e\cos.\Phi+e^2}{\sin.\Phi\,(e+\cos.\Phi)},$$

quae aequalitas ſubſiſtere non poteſt, quia in fractione iſta

$$\frac{1+2e\cos.\Phi+e^2}{\sin.\Phi\,(e+\cos.\Phi)},$$

tam

tam numerator, quam denominator, ad secundum dignitatis gradum euectus sit, quod nequaquam pro valoribus quantitatum $Z$ et $Z'$ locum habere potest.

§. 14. Progrediamur igitur nunc ad formam in Theoremate nostro (I) occurrentem:

$$\frac{d\Phi \sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

et dispiciamus, quos valores pro $z$ substituere oporteat, vt formula $dz.\frac{Z}{Z'}$, ad formam hanc propositam reducatur. Heic vero quum statim pateat, denominatorem valoris pro $z$ substituendi, esse $e+\cos.\Phi$, quia in denominatore formae propositae occurrit $(e+\cos.\Phi)^2$, ponamus primum:

$$z = \lambda \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi},$$

ex quo colligitur

$$dz = \frac{\lambda\, d\Phi \sin.\Phi\,(1+e\cos.\Phi)}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

hincque conficitur esse debere,

$$Z = \frac{\mu \sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}, \text{ et } Z' \frac{\mu(1+e\cos.\Phi)}{e+\cos.\Phi};$$

ita vt iam pateat pro $Z$, non nisi hanc formam $\sqrt{(mzz-1)}$ adhiberi posse, nam neque

$$1+mz^2 = \frac{e^2+2e\cos.\Phi+\cos.\Phi^2+m\lambda^2(1+2e\cos.\Phi+e^2}{(e+\cos.\Phi)^2},$$

nec

$$1-mzz = \frac{e^2+2e\cos.\Phi+\cos.\Phi^2-m\lambda^2(1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(e+\cos.\Phi^2},$$

vllo modo huic expressioni $\frac{\mu^2 \sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2}$, reddi possunt aequales. Nam priori casu ob $m$ positiuum, quantitates $2e\cos.\Phi + 2m\lambda^2 e\cos.\Phi$ elidi non possunt, posteriori vero casu si ponatur $m\lambda^2 = 1$, fiet

$$1-mzz = \frac{\cos.\Phi^2-1}{(e+\cos.\Phi)^2} = -\frac{\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2},$$

hinc

hinc itaque concluditur

$$m z z - 1 = \frac{\sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

posito nimirum $m \lambda^2 = 1$, siue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Tum vero fiet

$$1 \pm n z z = \frac{e^2 + 2e \cos. \Phi + \cos. \Phi^2 \pm \frac{n}{m}(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2}$$

$$= \frac{(1 \pm \frac{n}{m})(1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2} + \frac{(e^2 - 1 \pm \frac{n e^2}{m}) \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

posito igitur

$$1 = e^2 (1 \pm \frac{n}{m}) = e^2 (\frac{m \pm n}{m}), \text{ siue } e = \sqrt{\frac{m}{m \pm n}},$$

fiet

$$1 \pm n z z = \frac{(1 + e \cos. \Phi)^2}{e^2 (e + \cos. \Phi)^2}, \text{ hincque } Z' = \frac{1 + e \cos. \Phi}{e(e + \cos. \Phi)},$$

vnde demum deducitur

$$d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1 \pm n z z}} = \frac{e\, d \sin. \Phi^2}{\sqrt{m}(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}$$

$$= \frac{d \Phi \sin. \Phi^2}{\sqrt{(m \pm n)} (e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}.$$

Si pro $n$ signum adhibeatur positiuum et $e^2 = \frac{m}{m+n}$, ideoque $e < 1$, hinc integratio formulae $d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1 + n z z}}$ praestabitur per quantitatem algebraicam et arcum ellipticum, qui est Casus IV. §. 4. At si $e^2 = \frac{m}{m-n}$, necessum est vt ponatur $m > n$, ideoque $e > 1$, hinc formulae

$d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1 - n z z}}$ posito $m > n$, integrale dabitur per quantitatem algebraicam et arcum Hyperbolicum, qui Casus est VIII. §. 4.

§. 15. Ponamus deinde $z = \lambda \frac{(1 + e \cos. \Phi)}{e + \cos. \Phi}$, vnde fit

$$d z = (1 - e^2) \frac{\lambda\, d \Phi \sin. \Phi}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

ideoque quum esse debeat

$$dz.\frac{Z}{Z'}=\frac{d\Phi\, \text{sin.}\,\Phi^2}{(e+\text{cos.}\,\Phi^2)\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}},$$

vel saltem huic quantitati proportionale, colligitur

$$Z=\frac{\mu\,\text{sin.}\,\Phi}{e+\text{cos.}\,\Phi}\ \text{et}\ Z'=\frac{\mu'\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}}{e+\text{cos.}\,\Phi}.$$

Heic itaque mox liquet pro $Z$ vel $\sqrt{(1-mzz)}$, vel $\sqrt{(mzz-1)}$ adhibendum esse, priori casu fit

$$1-mzz=\frac{e^2+2e\,\text{cos.}\,\Phi+\text{cos.}\,\Phi^2-m\lambda^2(1+e\,\text{cos.}\,\Phi)^2}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2},$$

vbi si statuatur $m\lambda^2=1$, fiet

$$1-mzz=\frac{(e^2-1)\,\text{sin.}\,\Phi^2}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2},$$

hincque vicissim

$$mzz-1=\frac{(1-e^2)\,\text{sin.}\,\Phi^2}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2}.$$

Pro denominatore autem $Z'$, nunc non nisi has expressiones $\sqrt{(1-nzz)}$, vel $\sqrt{(nzz-1)}$ adhibere oportet, estque

$$1-nzz=\frac{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2-\frac{n}{m}(1+e\,\text{cos.}\,\Phi)^2}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2},$$

$$=\frac{(1-\frac{n}{m})(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2}-\frac{\text{sin.}\,\Phi^2(1-\frac{n}{m}e^2)}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2},$$

ideoque si fit $1=\frac{n}{m}e^2$, seu $e=\sqrt{\frac{m}{n}}$, erit

$$1-nzz=(1-\frac{n}{m})\frac{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2}$$

$$=\frac{e^2-1}{e^2}.\frac{1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2},\ \text{et vicissim}$$

$$nzz-1=\frac{1-e^2}{e^2}.\frac{1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2}.$$

Quare fiet

$$\frac{Z}{Z'}=\frac{e\,\text{sin.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}}\ \text{et}\ dz.\frac{Z}{Z'}=\frac{e(1-e^2)\lambda\, d\Phi\,\text{sin.}\,\Phi^2}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$=\frac{1-e^2}{\sqrt{n}}\ \frac{d\Phi\,\text{sin.}\,\Phi^2}{(e+\text{cos.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}},$$

hinc itaque Casus formulae nostrae VII et XI. deriuantur §. 4. Pro priori autem $dz\sqrt{(\frac{1-mzz}{1-nzz})}$, praescribitur

vt sit $m > n$, ideoque $e > 1$, nam si $m < n$, fieret $1 - mzz > 1 - nzz$ hoc est $(e^2 - 1)$ sin. $\Phi^2 > \frac{e^2 - 1}{e^2}(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)$, siue $e^2$ sin. $\Phi^2 > 1 + 2e \cos. \Phi + e^2$, ideoque

$$0 > 1 + 2e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2,$$

quod esset absonum, integratio igitur formulae istius

$$dz \sqrt{\left(\frac{1 - mzz}{1 - nzz}\right)} \text{ posito } m > n,$$

perficitur partim per quantitatem algebraicam, partim arcu Hyperbolae. Pro posteriori formula $dz \sqrt{\frac{mzz - 1}{nzz - 1}}$, necessum est vt sit $m < n$, ideoque $e < 1$, nam si esset $m > n$, fieret quoque $mzz - 1 > nzz - 1$, hincque vti supra

$$e^2 \text{ sin. } \Phi^2 > 1 + 2e \cos. \Phi + e^2,$$

quod omnino fieri nequit, proinde integratio formulae huius posterioris, quantitate algebraica et arcu Elliptico absoluitur.

§. 16. Sicque igitur iam expediuimus Casus formulae nostrae IV. VIII. VII. XI, quorum integratio quantitatem algebraicam et arcum siue Ellipticum seu Hyperbolicum inuoluit, ita vt nunc non remaneant nisi quatuor casus nimirum I. III. IX. X, quorum integratio praeter quantitatem algebraicam, binos arcus Sectionum Conicarum, vnum Ellipticum, alterum Hyperbolicum inuoluit; hi autem casus formulae propositae omnes et singuli se reduci patiuntur ad istud differentiale, quod Theoremate nostro (IV) occurrit $\frac{d\Phi(1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}$. Antequam vero hanc reductionem suscipiamus, hanc praeter rem erit, vt dispiciamus, quinam casus nostrae formulae se reduci patiantur ad differentialia

$$\frac{d\Phi(e+\text{cos}.\Phi)^2}{\text{sin}.\Phi^2\sqrt{(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2)}} \text{ et } \frac{d\Phi(1+e\,\text{cos}.\Phi)^2}{(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quae nostris Theorematibus (II) et (III) occurrunt.

§. 17. Pro differentiali $dz.\frac{Z}{Z'}$, ad istam formam

$$\frac{d\Phi(e+\text{cos}.\Phi)^2}{\text{sin}.\Phi^2\sqrt{(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2)}}$$

reducendo, primum poni conueniet

$$z=\frac{\lambda\sqrt{(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2)}}{\text{sin}.\Phi}, \text{ vnde deducitur}$$

$$dz=-\lambda\, d\Phi\frac{(1+e\,\text{cos}.\Phi)(e+\text{cos}.\Phi)}{\text{sin}.\Phi^2\sqrt{(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2)}},$$

hincque esse debet

$$Z=\mu\frac{(e+\text{cos}.\Phi)}{\text{sin}.\Phi} \text{ et } Z'=\mu'\frac{(1+e\,\text{cos}.\Phi)}{\text{sin}.\Phi},$$

quod omnino procedet, si statuatur $Z=\sqrt{(mzz-1)}$, tum enim fiet

$$mzz-1=\frac{m\lambda^2(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2)-\text{sin}.\Phi^2}{\text{sin}.\Phi^2}$$

$$=\frac{e^2+2e\,\text{cos}.\Phi+\text{cos}.\Phi^2}{\text{sin}.\Phi^2},$$

posito $m\lambda^2=1$, siue $\lambda=\frac{1}{\sqrt{m}}$. Deinde vero fiet

$Z'=\sqrt{(nzz-1)}$, est enim

$$nzz-1=\frac{n}{m}\frac{(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2)-\text{sin}.\Phi^2}{\text{sin}.\Phi^2}$$

$$=\frac{n}{m}\frac{(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2\,\text{cos}.\Phi^2)}{\text{sin}.\Phi^2}+\left(\frac{ne^2}{m}-1\right),$$

ideoque si statuatur

$$e^2=\frac{m}{n}, \text{ fiet } nzz-1=\frac{(1+e\,\text{cos}.\Phi)^2}{e^2\,\text{sin}.\Phi^2}.$$

Hinc itaque colligitur

$$dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}=-\frac{\lambda e\, d\Phi(e+\text{cos}.\Phi)^2}{\text{sin}.\Phi\sqrt{(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2)}}$$

$$=-d\Phi\frac{(e+\text{cos}.\Phi)^2}{\sqrt{n}.\,\text{sin}.\Phi^2\sqrt{(1+2e\,\text{cos}.\Phi+e^2)}}.$$

Et quum pro casu praesenti, tam esse possit $m>n$, quam

$m<n$,

$m < n$, consequimur hinc Casus nostros XI. et XII., prior scilicet locum habet, si fuerit $m < n$, posterior vero si statuatur $m > n$. Quum vero supra inuenerimus formulam nostram XII. ad solum arcum Hyperbolicum reduci, nunc omnino e re esset, vt ostenderetur reductionem modo inuentam, cum illa quae §. 12. allata est, plane conuenire. Verum tamen ne filum nostrae disquisitionis abrumpatur, hoc examen reseruabimus, vsque dum omnes reductiones ad finem perducere nobis licuerit.

§. 18. Altera substitutio pro praesenti casu, illa est, qua statuitur $z = \lambda \frac{(1 + e\,cos.\,\Phi)}{sin.\,\Phi}$, vnde colligitur

$$dz = -\lambda\, d\Phi \frac{(e + cos.\,\Phi)}{sin.\,\Phi^2}$$

quamobrem fiet

$$Z = \mu \frac{(e + cos.\,\Phi)}{sin.\,\Phi} \text{ et } Z' = \mu' \frac{\sqrt{(1 + 2\,e\,cos.\,\Phi + e^2)}}{sin.\,\Phi}.$$

Heic vero statim liquet pro $Z'$, non nisi istam formam $\sqrt{(1 + n z z)}$ adhiberi posse, quippe pro qua colligetur:

$$1 + n z z = \frac{sin.\,\Phi^2 + n \lambda^2 (1 + e\,cos.\,\Phi)^2}{sin.\,\Phi^2} = \frac{1 + 2\,e\,cos.\,\Phi + e^2}{e^2\,sin.\,\Phi^2},$$

si fuerit $n \lambda^2 = \frac{1}{e^2}$. Pro numeratore autem $Z$, adhiberi potest $\sqrt{(m z z \pm 1)}$, eritque

$$m z z \pm 1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{(1 + 2\,e\,cos.\,\Phi + e^2\,cos.\,\Phi^2)}{e^2\,sin.\,\Phi^2} \pm \frac{e^2\,sin.\,\Phi^2}{e^2\,sin.\,\Phi^2}$$

$$= \frac{m}{n} \frac{(cos.\,\Phi^2 + 2\,e\,cos.\,\Phi + e^2)}{e^2\,sin.\,\Phi^2} + \frac{(\frac{m}{n} - \frac{m}{n} e^2 \pm e^2)\,sin.\,\Phi^2}{e^2\,sin.\,\Phi^2},$$

vnde si ponatur

$$\frac{m}{n} = (\frac{m}{n} \mp 1)\, e^2, \text{ seu } e^2 = \frac{m}{m \mp n}, \text{ fiet}$$

$$Z = \sqrt{\frac{m}{n}} \frac{(cos.\,\Phi + e)}{e\,sin.\,\Phi},$$



ideoque

ideoque erit

$$dz.\frac{Z}{Z'} = dz\sqrt{\frac{mzz \pm 1}{1 + nzz}}$$
$$= -\lambda d\Phi \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \frac{(e + \cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}},$$
$$= -\frac{\sqrt{(m \mp n)}}{n} d\Phi \frac{(e + \cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}.$$

Casus igitur nostri differentialis II. et IV. hinc deriuantur, pro priori est $m > n$, vt $e$ valorem sortiatur realem, sitque $e > 1$, ideoque pro integratione arcum hyperbolicum adhibere necesse est, pro posteriori autem est $e < 1$, ideoque arcus Ellipticus in vsum vocandus.

§. 19. Vlterius procedendo formula

$$\frac{d\Phi(1 + e\cos.\Phi)^2}{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ad formam differentialis propositi reducetur, ponendo

$$z = \frac{\lambda \sin.\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}},$$

hinc enim fit

$$dz = \frac{\lambda.d\Phi(1 + e\cos.\Phi)(e + \cos.\Phi)}{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

tumque colligitur

$$Z = \frac{\mu(1 + e\cos.\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}} \text{ et } Z' = \frac{\mu'(e + \cos.\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}$$

Si itaque statuatur $Z = \sqrt{(1 - mzz)}$, consequemur

$$1 - mzz = \frac{1 + 2e\cos.\Phi + e^2 - m\lambda^2 \sin.\Phi^2}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2}$$
$$= \frac{(1 + e\cos.\Phi)^2}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2},$$

posito $m\lambda^2 = e^2$, tum vero erit

1 — m

$$1 - nzz = \frac{1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2 - \frac{ne^2}{m}\,\text{fin.}\,\Phi^2}{1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2}$$

$$= \frac{(\text{cof.}\,\Phi + e)^2}{1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2},$$ pofito

$1 - \frac{ne^2}{m} = 0$, fiue $e^2 = \frac{m}{n}$. Hinc igitur erit

$$dz.\frac{Z}{Z'} = dz\sqrt{\frac{1 - mzz}{1 - nzz}} = \frac{\lambda\,d\Phi\,(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{d\Phi\,(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{\sqrt{n}\,(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde cafus noftri differentialis VI. et VII. deriuantur, dum pro priori eft $n > m$, ideoque $e < 1$, quod valet pro arcu Elliptico, pro pofteriori autem eft $m > n$, hincque $e < 1$, quod indicat arcum Hyperbolicum.

§. 20. Deinde differentiale propofitum, ad formam

$$\frac{d\Phi\,(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

quoque reducetur, ponendo

$z = \frac{\lambda(e + \text{cof.}\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)}}$, vnde colligitur

$$dz = -\frac{\lambda\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

hinc facile perfpicitur effe debere

$$Z = \frac{\mu(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)}} \text{ et } Z' = \frac{\mu'\,\text{fin.}\,\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e)^2}},$$

ex quo patefcit, ftatui debere $Z' = \sqrt{(1 - nzz)}$, fiet autem tum

$$1 - nzz = \frac{1 + 2e\cos.\Phi + e^2 - n\lambda^2(e^2 + 2e\cos.\Phi + \cos.\Phi^2)}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2}$$

$$= \frac{(1 - e^2)\sin.\Phi^2}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2},$$

si fuerit $n\lambda^2 = 1$. Tumque habebimus $Z = \sqrt{(mzz \pm 1)}$, ita vt sit

$$mzz \pm 1 = \frac{\frac{m}{n}(\cos.\Phi^2 + 2e\cos.\Phi + e^2) \pm (1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2}$$

$$= \frac{(\frac{m}{n} \pm 1)(1 + 2e.\cos.\Phi + e^2\cos.\Phi^2)}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2}$$

$$- \frac{\sin.\Phi^2(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}e^2 \pm e^2)}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2},$$

vbi si ponatur
$\frac{m}{n} = e^2(\frac{m}{n} \pm 1)$, siue $e^2 = \frac{m}{m \pm n}$, erit $\sqrt{(mzz \pm 1)}$
$= \pm\sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1 + e\cos.\Phi}{e\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}$.

Hinc fiet

$$dz.\frac{z}{Z} = -\frac{\lambda}{e}\sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \frac{d\Phi(1 + e\cos.\Phi)^2}{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{(m \pm n)}}{n} \cdot \frac{d\Phi(1 + e\cos.\Phi)^2}{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

per hanc igitur reductionem, formularum nostrarum Nris. V. et VIII. §. 4. occurrentium integratio perficitur, vbi quidem pro priori earum, in qua $1 + mzz$ occurrit, nulla adhibenda est limitatio, ob $e^2 = \frac{m}{m+n}$ semper positiuum, erit vero tum $e < 1$, ideoque integratio rectificationem arcus Elliptici inuoluet. Quodsi vero habeatur $mzz - 1$, praescribitur vt sit $m > n$, quia alioquin $e$ fieret imaginarium, existente autem $e$ reali, erit $> 1$, vnde integratio rectificationem arcus hyperbolici supponit.

§. 21.

§. 21. Iam denique si differentiale $dz.\frac{Z}{Z'}$ ad istam formam:

$$\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

reducendum sit, adhibeatur primum substitutio

$$z=\frac{\lambda\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}, \text{ vnde } dz=\frac{\lambda d\Phi(1+e\cos.\Phi)}{(e+\cos.\Phi)^2}.$$

Tum vero patet esse debere,

$$Z=\mu\frac{(1+e\cos.\Phi)}{e+\cos.\Phi} \text{ et } Z'=\mu'\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi},$$

hincque pro $Z'$ non nisi haec formula $\sqrt{(1+nzz)}$ adhiberi potest, eritque

$$1+nzz=\frac{e^2+2e\cos.\Phi+\cos.\Phi^2+n\lambda^2\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2}$$
$$=\frac{1+2e\cos.\Phi+e^2}{(e+\cos.\Phi)^2},$$

si ponatur $n\lambda^2=1$. Pro $Z$ autem adhibendo $\sqrt{(1\pm mzz)}$, consequimur

$$1\pm mzz=\frac{e^2+2e\cos.\Phi+\cos.\Phi^2\pm\frac{m}{n}\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2}$$
$$\frac{1+2e\cos.\Phi+e^2\cos.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2}+\frac{\sin.\Phi^2(e^2-1\pm\frac{m}{n})}{(e+\cos.\Phi)^2},$$

hincque si ponatur

$$e^2=1\mp\frac{m}{n}=\frac{n\mp m}{n}, \text{ fiet } 1\pm mzz=\frac{(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2},$$

vnde concluditur

$$dz.\frac{Z}{Z'}=\frac{\lambda d\Phi(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$
$$=\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)^2}{\sqrt{n}(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}.$$

Per hanc igitur reductionem Casus Formulae nostrae I. et III. conficiuntur, scilicet $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$, existente $n>m$, quia alioquin $e$ fieret imaginarium, tumque $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1+nzz}}$ sine vlla limitatione, quippe quum valor ipsius $e$ semper fiat realis, siue $n$ maior, seu minor quam $m$ supponatur.

§. 22. Alteram reductionem differentialis $dz.\frac{Z}{Z'}$, ad formam

$$\frac{d\Phi\,(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

praebet substitutio, qua ponitur

$$z=\frac{\lambda\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi},\ \text{vnde fit}$$

$$dz=\frac{\lambda\,d\Phi\sin.\Phi\,(1+e\cos.\Phi)}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

tumque esse debet

$$Z=\mu\,\frac{(1+e\cos.\Phi)}{e+\cos.\Phi}\ \text{et}\ Z'=\frac{\mu'\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi},$$

quamobrem pro $Z'$ adhibere conueniet $\sqrt{(nzz-1)}$, eritque

$$nzz-1=\frac{n\lambda^2(1+2e\cos.\Phi+e^2)-(e^2+2e\cos.\Phi+\cos.\Phi^2)}{(e+\cos.\Phi)^2}$$
$$=\frac{\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2},$$

si ponatur $n\lambda^2=1$, tum vero erit pro $Z$,

$$1\pm mzz=1\pm\frac{m}{n}.\frac{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}{(e+\cos.\Phi)^2}$$
$$=\left(1\pm\frac{m}{n}\right)\frac{(1+2e\cos.\Phi+e^2\cos.\Phi^2)}{(e+\cos.\Phi)^2}$$
$$+\sin.\Phi^2\frac{(e^2-1\pm\frac{m}{n}e^2)}{(e+\cos.\Phi)^2},$$

vnde si statuatur $e^2\left(1\pm\frac{m}{n}\right)=1$, seu $e^2=\frac{n}{n\pm m}$, fiet

$$1\pm mzz=\frac{(1+e\cos.\Phi)^2}{e^2(e+\cos.\Phi)^2},\ \text{proinde fiet}$$

$$dz.\frac{Z}{Z'}=\frac{\lambda\,d\Phi}{e}.\frac{(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi^2)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$
$$=\frac{\sqrt{(n\pm m)}\,d\Phi\,(1+e\cos.\Phi)^2}{n.(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

et hac reductione iam Casus IX. et X. nostrae formulae differentialis absoluuntur, vbi quidem pro priori

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$$

nulla praescribitur conditio, quia $e$ semper fiet reale, pro posteriori autem seu $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}}$ necessario esse debet $n<m$,

$n > m$, quum alioquin $e$ valorem sortiretur imaginarium. Quatuor proinde Casus nostrae formulae differentialis, quorum integratio praeter quantitatem algebraicam, binos arcus vnum Ellipticum, alterum Hyperbolicum inuoluit, isti sequentes sunt, I. III. IX. X.

§. 23. Nunc quoque operae pretium erit, vt dispiciamus quomodo reductiones, istae quae pro eodem casu duplices occurrunt, inter se conciliari queant. Et primum quidem si proposita fuerit formula $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$ posito $m > n$, in §. 11. inuenimus esse:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}} = \frac{e}{\sqrt{m}}.\, d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cos.\Phi)^2},$$

posito

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}}.\frac{sin.\Phi}{1+e\,cos.\Phi},$$ ex §. 18. vero constat esse:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}} = -\frac{\sqrt{(m-n)}}{n}.\frac{d\psi(e+cos.\psi)^2}{sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}},$$

posito

$$z = \frac{1}{e\sqrt{n}}.\frac{1+e\,cos.\psi}{sin.\psi},$$ pro vtroque casu existente $e = \sqrt{\frac{m}{m-n}}$.

Hinc itaque concluditur esse debere $\frac{d\psi(e+cos.\psi)^2}{sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}}$

$$= \frac{-n}{m-n}.\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\,cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cos.\Phi)^2} = -\frac{(e^2-1)\,d\Phi\sqrt{(1+2e\,cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cos.\Phi)^2},$$

iam vero per Theorema (II.) colligitur

$$\frac{1}{e^2-1}\int\frac{d\psi(e+cos.\psi)^2}{sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}} = \int\frac{d\psi\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}}{(1+e\,cos.\psi)^2}$$
$$-\frac{(e+cos.\psi)\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}}{(e^2-1)(1+e\,cos.\psi)\,sin.\psi},$$

quamobrem esse debebit

$$\int\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\,cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cos.\Phi)^2} + \int\frac{d\psi\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}}{(1+e\,cos.\psi)^2}$$
$$= \frac{(e+cos.\psi)\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}}{(e^2-1)\,sin.\psi(1+e\,cos.\psi)}.$$

Cuius propositionis demonstratio sequenti ratione adornatur: quia

$$\frac{e}{\sqrt{m}}.\frac{sin.\Phi}{1+e\,cos.\Phi} = \frac{1}{e\sqrt{n}}.\frac{1+e\,cos.\psi}{sin.\psi}$$

 colligi-

colligitur

$$e\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{1+e\cos.\psi}{\sin.\psi},$$

hincque

$$\frac{\sin.\Phi\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\cos.\Phi} = \frac{1+e\cos.\psi}{e\sin.\psi},$$

ex quo deducitur

$$\frac{(1+e\cos.\Phi)^2+\sin.\Phi^2(e^2-1)}{(1+e\cos.\Phi)^2} = \frac{(1+e\cos.\psi)^2+e^2\sin.\psi^2}{e^2\sin.\psi^2},$$

siue

$$\frac{(\cos.\Phi+e)^2}{(1+e\cos.\Phi)^2} = \frac{1+2e\cos.\psi+e^2}{e^2\sin.\psi^2} \text{ et}$$

$$\frac{\cos.\Phi+e}{1+e\cos.\Phi} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{e\sin.\psi},$$

vicissim autem erit

$$\frac{\cos.\psi+e}{1+e\cos.\psi} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e\sin.\Phi}.$$

Fiet proinde

$$\frac{(e+\cos.\psi)\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(e^2-1)\sin.\psi\,(1+e\cos.\psi)} = \frac{e}{e^2-1}\cdot\frac{(e+\cos.\psi)(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\psi)(1+e\cos.\Phi)},$$

cuius differentiale erit

$$\frac{e\,d\Phi\,\sin.\Phi}{(1+e\cos.\Phi)^2}\,\frac{(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\psi)} + \frac{e\,d\psi\,\sin.\psi}{(1+e\cos.\psi)^2}\,\frac{(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)},$$

$$= d\Phi\,\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + d\psi\,\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}, \text{ ob}$$

$$e\sin.\Phi\,\frac{(e+\cos.\psi)}{1+e\cos.\psi} = \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)},$$

et vicissim

$$e\sin.\psi\,\frac{(e+\cos.\Phi)}{1+e\cos.\Phi} = \sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}.$$

Egregium igitur hinc colligitur Theorema Geometricum, quod nimirum si in Hyperbola constituantur ad focum bini anguli $\Phi$ et $\psi$ ita comparati, vt sit

$$\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{1+e\cos.\psi}{e\sin.\psi},$$

tum summam binorum arcuum Hyperbolae his angulis respondentium, aequalem esse quantitati algebraicae

$\frac{e}{e^2-1}$

$$\frac{e}{e^2-1}\cdot\frac{(e+\text{cos}.\,\Phi)\,(e+\text{cos}.\,\psi)}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)\,(1+e\,\text{cos}.\,\psi)}+C$$

$$=\frac{(e+\text{cos}.\,\Phi)\,(e+\text{cos}.\,\psi)}{(e^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\text{sin}.\,\Phi\,\text{sin}.\,\psi}+C.$$

§. 24. Porro si reductiones formulae $dz\sqrt{\frac{1\pm mzz}{1\pm nzz}}$ §§. 11. et 20. traditas, inter se comparemus, consequimur has aequationes:

$$\sqrt{(1-e^2)}\;\frac{\text{sin}.\,\Phi}{1+e\,\text{cos}.\,\Phi}=\frac{e+\text{cos}.\,\psi}{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}\text{ et}$$

$$d\Phi\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}=\frac{d\psi\,(1+e\,\text{cos}.\,\psi)^2}{(e^2-1)\,(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-d\psi\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)^2}+\frac{e^2}{e^2-1}\cdot d.\frac{\text{sin}.\,\psi\,(e+\text{cos}.\,\psi)}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)\,\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}.$$

ideoque heic demonstrari debet, esse

$$\int d\Phi\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}+\int d\psi\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)^2}=C$$

$$-\frac{e^2}{1-e^2}\cdot\frac{\text{sin}.\,\psi\,(e+\text{cos}.\,\psi)}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)\,\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}$$

$$=C-\frac{e^2}{\sqrt{(1-e^2)}}\,\frac{\text{sin}.\,\psi.\,\text{sin}\,\Phi}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)\,(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)},$$

existente

$e=\sqrt{\frac{m}{m+n}}$. Quum igitur sit

$$\frac{\text{sin}.\,\Phi\,\sqrt{(1-e^2)}}{1+e\,\text{cos}.\,\Phi}=\frac{e+\text{cos}.\,\psi}{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}},\text{ fiet }\frac{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2-\text{sin}.\,\Phi^2\,(1-e^2)}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}$$

$$=\frac{1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2-(e+\text{cos}.\,\psi)^2}{1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2},$$

ideoque

$$\frac{e+\text{cos}.\,\Phi}{1+e\,\text{cos}.\,\Phi}=\frac{\text{sin}.\,\psi}{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}},$$

nec non

$$\frac{\text{sin}.\,\Phi\,\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cos}.\,\Phi}=\frac{e+\text{cos}.\,\psi}{\text{sin}.\,\psi};$$

 quare

quare fieri oportet

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}$$
$$= C - \frac{e^2}{1-e^2}\cdot\frac{(e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\psi)}.$$

Sumto autem differentiali fractionis

$$\frac{e^2}{e^2-1}\;\frac{(e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\psi)},$$

habebimus

$$\frac{e^2\,d\Phi\sin.\Phi}{(1+e\cos.\Phi)^2}\cdot\left(\frac{e+\cos.\psi}{1+e\cos.\psi}\right) + \frac{e^2\,d\psi\sin.\psi}{(1+e\cos.\psi)^2}\left(\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}\right)$$
$$= \frac{e^2\,d\Phi.\sin.\Phi^2}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$
$$+ \frac{e^2\,d\psi.\sin.\psi^2}{(1+e\cos.\psi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$ ob $\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}$
$$= \frac{\sin.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}$$ et vicissim
$$\frac{e+\cos.\psi}{1+e\cos.\psi} = \frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

quare vt veritas propositionis sibi constet, necessum quoque est fore:

$$d\Phi\frac{(1+2e\cos.\Phi+e^2\cos.\Phi^2)}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$
$$+ d\psi\frac{(1+2e\cos.\psi+e^2\cos.\psi^2)}{(1+e\cos.\psi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}} = 0,$$

hoc est

$$\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} + \frac{d\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}} = 0,$$

id quod sequenti ratiocinio confirmatur, ob

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi} = \frac{1+e\cos.\psi}{e+\cos.\psi},$$ fiet
$$\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)}{\sin.\Phi^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} = (e^2-1)\frac{d\psi\sin.\psi}{(e+\cos.\psi)^2},$$

hinc

$$\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} = (e^2-1)\frac{d\psi\sin.\psi.\sin.\Phi^2}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi^2)}$$
$$= -\frac{\sqrt{(1-e^2)}\,d\psi\sin.\Phi}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)} = -\frac{d\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

ob $\sin.\Phi\,\sin.\psi\,\sqrt{(1-e^2)} = (e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)$ et

$$\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1-e^2)}}{1+e\cos.\Phi} = \frac{e+\cos.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}.$$

Hinc

Hinc elegans quoque istud Theorema comprobatur, quod si ad focum Ellipseos, a vertice eius, constituantur bini anguli $\Phi$ et $\psi$ ita comparati, vt sit

$$\sin.\Phi \sin.\psi \sqrt{(1-e^2)} = (e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi),$$

tum summam binorum arcuum Ellipticorum his angulis respondentium, esse aequalem quantitati algebraicae:

$$\frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{(e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\psi)} + C.$$

§. 25. Deinde si conferamus inter se reductiones formulae VI. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}}$, posito $n > m$, §§. 12. et 19. institutas, has obtinebimus aequationes:

$$\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{\sin.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}} \text{ et}$$

$$(e^2-1)\, d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}$$

$$d\psi \frac{(1+e\cos.\psi)^2}{(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

posito $e = \sqrt{\frac{m}{n}}$, vnde per Theorema (III.) colligetur:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}$$

$$= \frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{\sin.\psi(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\psi)\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

demonstratio autem huius propositionis §. praecedenti iam est allata, quia aequalitas

$$\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{\sin.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

omnino congruit cum illa:

$$\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1-e^2)}}{1+e\cos.\Phi} = \frac{e+\cos.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}.$$

Denique reductiones formulae XII. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}$, posito $m > n$, §§. 12. et 17. institutas, inter se conferendo, colligi-

ligimus:

$$\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{e\sin.\psi} \text{ et}$$

$$d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} = d\psi\frac{(e+\cos.\psi)^2}{(1-e^2)\sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

ex quo per Theorema (II.) conficitur:

$$\int d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \int d\psi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}$$

$$= C + \frac{(e+\cos.\psi)\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(e^2-1)\sin.\psi(1+e\cos.\psi)}$$

$$= C + \frac{e(e+\cos.\psi)(e+\cos.\Phi)}{(e^2-1)(1+e\cos.\psi)(1+e\cos.\Phi)},$$

cuius propositionis demonstratio iam §. 23. est allata.

§ 26. Porro si vlterius procedendo, reductiones formulae IV. §§. 14. et 18. institutae, inter se conferantur, has obtinebimus aequationes

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi} = \frac{1+e\cos.\psi}{\sin.\psi\sqrt{(1-e^2)}} \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi.\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} = \frac{d\psi(e+\cos.\psi)^2}{(e^2-1)\sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

vnde per Theoremata (I.) et (II.) concludetur:

$$\int d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \int d\psi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}$$

$$= \frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} - \frac{(e+\cos.\psi)\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1-e^2)\sin.\psi(1+e\cos.\psi)} + C,$$

quae expressio algebraica ob

$$\frac{\sin.\psi\sqrt{(1-e^2)}}{e+\cos.\psi} = \frac{\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi},$$

in hanc abit:

$$\frac{\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}\left(\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{1+e\cos.\Phi} - \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{\sqrt{(1-e^2)}(1+e\cos.\psi)}\right),$$

et denuo ob

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{1+e\cos.\psi} = \frac{1+e\cos.\Phi}{\sqrt{(1-e^2)(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

in hanc

$$\frac{\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}\left(\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{1+e\cos.\Phi} - \frac{1+e\cos.\Phi}{(1-e^2)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}\right),$$

cuius

cuius quantitatis facta euolutione, iſtam demum conſequimur expreſſionem:

$$\frac{+e^2}{e^2-1}\cdot\frac{\sin.\Phi(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=\frac{e^2}{e^2-1}\cdot\frac{(e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\psi)}$$

quam iam ſupra §. 24, cum iſtis formulis integralibus congruere inuenimus. Vlterius ſi reductiones pro formula VIII. §§. 14. et 20 allatae, inter ſe conferantur, hae prodibunt aequationes:

$$\frac{\sqrt{(e^2-1)(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi}=\frac{e(e+\cos.\psi)}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}} \text{ et}$$

$$\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$=-\frac{1}{e^2-1}\cdot\int\frac{d\psi(1+e\cos.\psi)^2}{(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde per Theoremata noſtra (I.) et (III.) colligitur:

$$\int d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}+\int d\psi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}$$

$$=C+\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)}$$

$$+\frac{e^2}{e^2-1}\;\frac{\sin.\psi(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\psi)\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

hinc quum ſit per §. 23.

$$\frac{e\sin.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}=\frac{1+e\cos.\Phi}{e+\cos.\Phi} \text{ et}$$

$$\frac{e+\cos.\psi}{1+e\cos.\psi}=\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e\sin.\Phi},$$

quantitas iſta algebraica in hanc abibit:

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi}\left(\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}+\frac{1+e\cos.\Phi}{(e^2-1)\sin.\Phi}\right)$$

$$=\frac{(e+\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e^2-1)\sin.\Phi(1+e\cos.\Phi)}$$

cuius quantitatis aequalitas cum integralibus iſtis, iam ſupra §. 23. eſt demonſtrata.

§. 27. Nunc quoque comparationem instituendo reductionum pro formula VII. §§. 15. et 19. institutarum, ad has pertingemus aequationes:

$$\frac{1+e\,cos.\,\Phi}{e+cos.\,\Phi} = \frac{e\,sin.\,\psi}{\sqrt{(1+2e\,cos.\,\psi+e^2)}} \text{ et}$$

$$\int \frac{d\Phi\,sin.\,\Phi^2}{(e+cos.\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,cos.\,\Phi+e^2)}} =$$

$$\frac{1}{1-e^2}\int \frac{d\psi\,(1+e\,cos.\,\psi)^2}{(1+2e\,cos.\,\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quarum expressionum aequalitas modo a nobis est demonstrata. Tum vero demum, instituta comparatione reductionum pro formula XI. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}$, casu $m < n$, §§. 15. et 17. institutarum, has obtinebimus aequationes:

$$\frac{1+e\,cos.\,\Phi}{e+cos.\,\Phi} = \frac{\sqrt{(1+2e\,cos.\,\psi+e^2)}}{sin.\,\psi} \text{ et}$$

$$\int \frac{d\Phi\,sin.\,\Phi^2}{(e+cos.\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,cos.\,\Phi+e^2)}} =$$

$$\frac{1}{e^2-1}\int \frac{d\psi\,(e+cos.\,\psi)^2}{sin.\,\psi^2\sqrt{(1+2e\,cos.\,\psi+e^2)}},$$

quod cum veritate consentire, iam in §. modo antecedenti est demonstratum.

§. 28. Hinc igitur iam facile perspicitur, quomodo singuli casus nostrae formulae differentialis expediri queant, quicunque valores litteris $m$ et $n$ tribuantur, nisi quaepiam harum quantitatum vel euanescat, vel in infinitum abeat; quibus casibus euenit, vt integrale vel per rectificationem parabolae, vel quadraturam circuli exprimatur, vel denique algebraicum consequatur valorem. Ne igitur quidquam in hac nostra disquisitione deficere videatur, iam etiam expendamus, quomodo integralia talium formularum ex nostris quoque praeceptis deriuari queant. Casus igitur vbi primum vel $m$ vel $n$ euanescere supponitur,

nitur, sunt hi sequentes:

$$dz\sqrt{(1+mzz)};\quad dz\sqrt{(1-mzz)};$$

$$dz\sqrt{(mzz-1)};\ \text{posito}\ n=0;$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)}};\ \frac{dz}{\sqrt{(1-nzz)}};\ \frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}},\ \text{posito}\ m=0.$$

Si prima harum formularum conferatur cum illis, quas contemplati sumus, videbimus esse $e=1$, ideoque fiet

$$dz\sqrt{(1+mzz)}=\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{d\Phi\sqrt{2(1+\cos.\Phi)}}{(1+\cos.\Phi)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{d\Phi}{2\cos.\tfrac{1}{2}\Phi^3},\ \text{posito}$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\sin.\Phi}{1+\cos.\Phi}=\frac{1}{\sqrt{m}}.\ \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\Phi.$$

Secunda harum formularum nimirum $dz\sqrt{(1-mzz)}$, expeditur ope formulae III. §. 21. vbi $\frac{1}{e}=0$, tum enim fiet:

$$e\sqrt{n}=\sqrt{(n+m)}=\sqrt{m}\ \text{et}\ \frac{\lambda}{e}=\frac{1}{e\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{m}},$$

quare erit

$$dz\sqrt{(1-mzz)}=\frac{\lambda d\Phi(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$=\frac{\lambda}{e}d\Phi.\cos.\Phi^2=\frac{1}{\sqrt{m}}d\Phi.\cos.\Phi^2,\ \text{posito}$$

$$z=\frac{\lambda\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}=\frac{\lambda}{e}\sin.\Phi=\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{m}}.$$

Deinde formula $dz\sqrt{(mzz-1)}$ reducitur ad casus nostros IV. et VIII. §. 14. posito $e=1$, eritque

$$dz\sqrt{(mzz-1)}=\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\sqrt{m}(1+\cos.\Phi)^2\sqrt{2(1+\cos.\Phi)}}$$

$$=\frac{d\Phi.\sin.\tfrac{1}{2}\Phi^2}{2\sqrt{m}.\cos.\tfrac{1}{2}\Phi^3},$$

quod omnino rite se habet, posito $z=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m(1+\cos.\Phi)}}$.

§. 29. Vlterius procedendo, pro casibus vbi $m$ statuitur $=0$, differentiale $\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)}}$ reducitur ad Casus no-

nostros I. vel III, statuendo $e=1$, tum vero fit

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)}}=\frac{d\Phi}{\sqrt{2n(1+\cos.\Phi)}}=\frac{d\Phi}{2\sqrt{n}.\cos.\frac{1}{2}\Phi},\ \text{vbi}$$

$$z=\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{n}(1+\cos.\Phi)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\Phi.$$

Tum differentiale $\frac{dz}{\sqrt{(1-nzz)}}$ per formulas V. et VI. expeditur, posito $e=0$, (vid. §. 11. vel 12.) eritque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-nzz)}}=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}.d\Phi,$$

prouti ponatur $z$ vel $=\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{n}}$ vel $z=\frac{\cos.\Phi}{\sqrt{n}}$. Denique differentiale $\frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}}$ per Formulas nostras IX. et X. expeditur §. 22, vbi $e=1$, eritque

$$\frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{d\Phi}{\sqrt{2(1+\cos.\Phi)}}=\frac{d\Phi}{2\sqrt{n}.\cos.\frac{1}{2}\Phi},$$

posito

$$z=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(1+\cos.\Phi)}=\frac{1}{\sqrt{n}.\cos.\frac{1}{2}\Phi}.$$

§. 30. Formulae hucusque consideratae facile expediuntur, maius autem negotium facescunt, illae, pro quibus statuitur siue $m$, seu $n$ infinito aequale, quae sequentes sunt:

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(1+mzz)};\ \frac{dz}{z}\sqrt{(1-mzz)};$$

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(mzz-1)}\ \text{posito}\ n=\infty.$$

$$\frac{zdz}{\sqrt{(1+nzz)}};\ \frac{zdz}{\sqrt{(1-nzz)}};\ \frac{zdz}{\sqrt{(nzz-1)}},\ \text{posito}\ m=\infty.$$

Si primum horum differentialium ad Formam IX. §. 22. reducere vellemus, consequeremur $e=1$, tum vero esse deberet:

$$z=\frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\cos.\Phi)}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(1+\cos.\Phi)},$$

quod

quod suppositionem dat incongruam. Loco igitur anguli $\Phi$, introducamus in calculum angulum $\psi$ ita comparatum, vt sit:

$$\sqrt{(1-e^2)}\,\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}=\frac{e+\cos.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}\ \text{et}$$
$$\frac{1+e\cos.\Phi}{e+\cos.\Phi}=\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{\sin.\psi}.$$

Hinc differentiando colligitur:

$$(1-e^2)\,\frac{d.\Phi\sin.\Phi}{(e+\cos.\Phi)^2}=-\frac{d\psi(1+e\cos.\psi)(e+\cos.\psi)}{\sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

vnde multiplicando per

$$\frac{(1+e\cos.\Phi)^2}{(1-e^2)\sin.\Phi^2}=\frac{1+2e\cos.\psi+e^2}{(e+\cos.\psi)^2},$$

producitur,

$$\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sin.\Phi}=-\frac{d\psi(1+e\cos.\psi)\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{\sin.\psi(e+\cos.\psi)},$$

denique facta multiplicatione per

$$\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=\frac{e+\cos.\psi}{1+e\cos.\psi},$$

concluditur

$$\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=-\frac{d\psi}{\sin.\psi^2}\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)};$$

proinde erit

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(1+mzz)}=-\frac{d\psi}{\sin.\psi^2}\sqrt{2(1+\cos.\psi)},\ \text{vbi}$$
$$z=\lambda\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi}=\frac{\lambda(1+e\cos.\psi)}{\sqrt{(1-e^2)}\sin.\psi}=\frac{1+e\cos.\psi}{\sqrt{m}.\sin.\psi},\ \text{ob}$$
$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{n}}\ \text{et}\ \sqrt{(1-e^2)}=\sqrt{\frac{m}{n+m}}=\sqrt{\frac{m}{n}},\ \text{posito}\ n=\infty.$$

§. 31. Secundum horum differentialium ad Formam III. §. 21. reduceretur quidem, fieretque $e=1$, verum substitutio:

$$z=\frac{\lambda\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}=\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{n}.(1+e\cos.\Phi)}$$

incongrua euadit, quapropter iam angulum $\psi$ in calculum introducamus ita comparatum, vt sit

 $e\sqrt{}$

$$e\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}=\frac{1+e\cos.\psi}{\sin.\psi},$$

nec non

$$\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}=\frac{1+e\cos.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

vnde differentiando eruitur:

$$\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)}{(e+\cos.\Phi)^2}=-\frac{d\psi\sin.\psi(e+\cos.\psi)}{(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

tumque multiplicando per

$$\frac{1+e\cos.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\sin.\psi}{e+\cos.\psi},$$

obtinebimus:

$$\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=-\frac{d\psi.\sin.\psi^2}{(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quare fiet

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(1-mzz)}=-\frac{d\psi\sin.\psi^2}{(2+2\cos.\psi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{d\psi\sin.\psi^2}{8\cos.\tfrac{1}{2}\psi^3}=-\frac{d\psi\sin.\tfrac{1}{2}\psi^2}{2\cos.\tfrac{1}{2}\psi},$$

posito

$$z=\frac{\lambda\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}=\frac{\lambda(1+e\cos.\psi)}{\sqrt{(e^2-1)}\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}.$$

At pro casu praesenti est, $\lambda=\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sqrt{(e^2-1)}=\sqrt{\frac{m}{n}}$, hinc $\frac{\lambda}{\sqrt{(e^2-1)}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$, vnde erit

$$z=\frac{1+\cos.\psi}{\sqrt{2m(1+\cos.\psi)}}=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}\psi}{\sqrt{m}},$$

et facta hac substitutione, formulas differentiales perfecte congruere facile perspicietur. Denique $\frac{dz}{z}\sqrt{(mzz-1)}$ ad formulas IV. vel XI. reducitur per §. 14. et 15. posito

sito $e=0$, tumque fiet:

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(mzz-1)} = \frac{d\Phi\,\sin.\Phi^2}{\cos.\Phi^2},\ \text{posito}\ z = \frac{1}{\sqrt{m}.\cos.\Phi}.$$

§. 32. Nunc si differentiale $\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+nzz)}}$ ad formulam II. §. 11, reducere vellemus, ponendum esset $z = \frac{\sin.\Phi}{\sqrt{m(1+\cos.\Phi)}}$, existente $e=1$ et $m$ infinito, quae substitutio incongrua est, huic autem incommodo medela adfertur, statuendo

$$\frac{1+e\cos.\psi}{\sin.\psi} = e\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi},\ \text{siue}$$

$$\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{e\sin.\psi},$$

vnde fit

$$(e^2-1)\frac{d\Phi\sin.\Phi}{(1+e\cos.\Phi)^2} = -\frac{d\psi(1+e\cos.\psi)(e+\cos.\psi)}{e\sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}$$

et multiplicando per

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi} = \frac{e(\cos.\psi+e)}{1+e\cos.\psi};$$

$$(e^2-1)\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} = -\frac{d\psi(e+\cos.\psi)^2}{\sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

quare fit

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+nzz)}} = \frac{e\,d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{m(1+e\cos.\Phi)^2},$$

$$= -\frac{e\,d\psi(e+\cos.\psi)^2}{m(e^2-1)\sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}.$$

Est vero $e^2-1 = \frac{n}{m-n} = \frac{n}{m}$, ob $m=\infty$, hinc erit $m(e^2-1)=n$, ideoque ob $e=1$,

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+nzz)}} = -\frac{d\psi(1+\cos.\psi)^2}{n\sin.\psi^2\sqrt{2(1+\cos.\psi)}}$$

$$= -\frac{d\psi\cos.\frac{1}{2}\psi}{2n\sin.\frac{1}{2}\psi^2},\ \text{posito}$$

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}}.\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{e\sqrt{(e^2-1)}}{\sqrt{n}}.\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{1+e\cos.\psi}{\sqrt{n}.\sin.\psi},$$

hinc ob $e=1$, $z=\frac{1}{\sqrt{n}}.\cot.\frac{1}{2}\psi$. Deinde si propositum fuerit differentiale $\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-nzz)}}$, quod sub Formula nostra V. comprehenditur, idem occurrit incongruum, quod suppo-

sitio

ſitio $z = \frac{e}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi}$, ſubſiſtere nequeat, poſito autem

$$\sqrt{(1 - e^2)}\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{e + \text{coſ.}\,\psi}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\psi + e^2)}},$$

fit differentiando:

$$\sqrt{(1 - e^2)}\,\frac{d\Phi(e + \text{coſ.}\,\Phi)}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = -\frac{d\psi\,\text{ſin.}\,\psi\,(1 + e\,\text{coſ.}\,\psi)}{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\psi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et multiplicando per

$\frac{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}}{e + \text{coſ.}\,\Phi} = \frac{1 + e\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi\,\sqrt{(1 - e^2)}}$, erit

$$\frac{d\Phi\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = -\frac{d\psi.\,(1 + e\,\text{coſ.}\,\psi)^2}{(1 - e^2)(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\psi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

nec non

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{(1 - nzz)}} = \frac{e}{m} \cdot \frac{d\Phi\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}$$

$$= -\frac{e\,d\psi\,(1 + e\,\text{coſ.}\,\psi)^2}{m(1 - e^2)(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\psi + e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

At eſt $1 - e^2 = \frac{n}{m + n}$, hinc $m(1 - e^2) \frac{mn}{m + n}$, et caſu $m$ infiniti, fit $m(1 - e^2) = n$, ideoque

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{(1 - nzz)}} = -\frac{d\psi\,(1 + \text{coſ.}\,\psi)^2}{n\,(2\,(1 + \text{coſ.}\,\psi))^{\frac{3}{2}}}$$

$= -\frac{d\psi}{2}.\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\psi$ ob $e = 1$, exiſtente

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{e\sqrt{(1 - e^2)}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{e + \text{coſ.}\,\psi}{e\sqrt{n}(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\psi + e^2)},$$

$$\text{ſeu } z = \frac{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\,\psi)}}{\sqrt{2n}} = \frac{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{n}}.$$

Caeterum binae hae reductiones iam quoque directe ex §. 18. et 19. deduci poſſunt. Denique differentiale $\frac{z\,dz}{\sqrt{(nzz - 1)}}$ reducitur ad formulam noſtram XI. §. 22, ponendo $e = 0$, erit-

eritque $\frac{z\,dz}{\sqrt{(nzz-1)}} = \frac{d\Phi}{n\,cos.\Phi^2}$, posito $z = \frac{1}{\sqrt{n.cos.\Phi}}$, et substitutione facta, horum differentialium aequalitas mox innotescet.

§. 33. Dum supra §. 23. 24, ostendimus esse pro Hyperbola:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cos.\Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}}{(1+e\,cos.\psi)^2}$$
$$= C + \frac{e}{e^2-1} \cdot \frac{(e+cos.\Phi)(e+cos.\psi)}{(1+e\,cos.\Phi)(1+e\,cos.\psi)},$$

posito

$$e\sqrt{(e^2-1)}\frac{sin.\Phi}{1+e\,cos.\Phi} = \frac{1+e\,cos.\psi}{sin.\psi},$$

et pro ellipsi:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cos.\Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}}{(1+e\,cos.\psi)^2}$$
$$= C - \frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{(e+cos.\Phi)(e+cos.\psi)}{(1+e\,cos.\Phi)(1+e\,cos.\psi)},$$

posito

$$\sqrt{(1-e^2)}\frac{sin.\Phi}{e+cos.\Phi} = \frac{e+cos.\psi}{sin.\psi},$$

valorem constantis C nondum definiuimus, quare restat, vt id hic expediamus. Definietur autem ille valor commodissime ex suppositione $\Phi = \psi$, tum scilicet erit pro priori casu $e\sqrt{(e^2-1)}\,sin.\Phi^2 = (1+e\,cos.\Phi)^2$, ideoque $e\sqrt{(e^2-1)} = 1 + 2.e\,cos.\Phi + e\,cos.\Phi^2(e+\sqrt{(e^2-1)})$, vnde deducitur:

$$cos.\Phi + \frac{1}{e+\sqrt{(e^2-1)}} = \frac{\sqrt{((e\sqrt{(e^2-1)}-1)(e^2+e\sqrt{(e^2-1)}+e^2)}}{e(e+\sqrt{(e^2-1)})},$$

haec autem formula aliquanto fit concinnior, si loco $e$ in computum introducatur $sin.\lambda = \frac{1}{e}$, tum enim erit:

$$cos.\Phi^2(1+cos.\lambda) + 2\,sin.\lambda\,cos.\Phi = cos.\lambda - sin.\lambda^2$$

et proinde

$cos.\Phi^2 + 2\,tang.\tfrac{1}{2}\lambda\,cos.\Phi = \frac{cos.\lambda - sin.\lambda^2}{1+cos.\lambda}$, ob $\frac{sin.\lambda}{1+cos.\lambda} = tang.\tfrac{1}{2}\lambda$;

hincque $cos.\Phi^2 + 2\,tang.\tfrac{1}{2}\lambda\,cos.\Phi = \frac{cos.\lambda^2 + cos.\lambda - 1}{1+cos.\lambda}$,

 quam-

quambobrem obtinebimus

$$(\text{cos}.\,\phi + \text{tang}.\,\tfrac{1}{2}\lambda)^2 = \frac{(\text{cos}.\,\lambda^2 + \text{cos}.\,\lambda - 1)(1 + \text{cos}.\,\lambda)}{(1 + \text{cos}.\,\lambda)^2}$$

$$+ \frac{\text{sin}.\,\lambda^2}{(1 + \text{cos}.\,\lambda)^2} = \frac{\text{cos}.\,\lambda^3 + \text{cos}.\,\lambda^2}{(1 + \text{cos}.\,\lambda)^2} = \frac{\text{cos}.\,\lambda^2}{1 + \text{cos}.\,\lambda}.$$

hincque fit:

$$\text{cos}.\,\phi + \text{tang}.\,\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{\text{cos}.\,\lambda \sqrt{2}}{2\,\text{cos}.\,\tfrac{1}{2}\lambda} \text{ et}$$

$$\text{cos}.\,\phi = \frac{1}{\text{cos}.\,\tfrac{1}{2}\lambda}\left(\frac{\text{cos}.\,\lambda}{\sqrt{2}} - \text{sin}.\,\tfrac{1}{2}\lambda\right),$$

quae aequatio semper subsistere potest, siquidem quadratum denominatoris $\text{cos}.\,\tfrac{1}{2}\lambda^2$ excedat quadratum numeratoris $\tfrac{1}{2}\text{cos}.\,\lambda^2 - \sqrt{2}.\,\text{sin}.\,\tfrac{1}{2}\lambda\,\text{cos}.\,\lambda + \text{sin}.\,\tfrac{1}{2}\lambda^2$, est vero $\text{cos}.\,\tfrac{1}{2}\lambda^2 - \text{sin}.\,\tfrac{1}{2}\lambda^2 = \text{cos}.\,\lambda$, vnde esse debet

$$\text{cos}.\,\lambda > \tfrac{1}{2}\text{cos}.\,\lambda^2 - \sqrt{2}.\,\text{sin}.\,\tfrac{1}{2}\lambda\,\text{cos}.\,\lambda, \text{ siue}$$

$$1 + \sqrt{2}.\,\text{sin}.\,\tfrac{1}{2}\lambda > \tfrac{1}{2}\text{cos}.\,\lambda,$$

de quo nullum est dubium, quia $\text{sin}.\,\lambda$ ideoque tanto magis $\text{sin}.\,\tfrac{1}{2}\lambda$, semper poni potest positiuus. Si igitur arcus Hyperbolae angulo iam quaesito $\phi$ respondens indigitetur per $\pi$, fiet

$$2\pi = C - \frac{e^2}{e^2 - 1}.\frac{(e + \text{cos}.\,\phi)}{(1 + e\,\text{cos}.\,\phi)^2},$$

ideoque

$$C = 2\pi + \frac{e^2}{e^2 - 1}.\frac{(e + \text{cos}.\,\phi)^2}{(1 + e\,\text{cos}.\,\phi)^2},$$

vbi expressio algebraica ob

$$\text{cos}.\,\phi = \frac{\text{cos}.\,\lambda}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\lambda)}} - \frac{\text{sin}.\,\lambda}{1 + \text{cos}.\,\lambda} = \frac{\text{cos}.\,\lambda\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\lambda)} - \text{sin}.\,\lambda}{(1 + \text{cos}.\,\lambda)}$$

$$= \frac{\text{cos}.\,\lambda - \sqrt{(1 - \text{cos}.\,\lambda)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\,\lambda)}},$$

in sequentem abit

$$\frac{e^2}{e^2 - 1}.(1 + \text{cos}.\,\lambda) = \frac{1 + \text{cos}.\,\lambda}{\text{cos}.\,\lambda^2}.$$

Pro

Pro posteriori casu si statuatur $e = \text{sin.}\,\lambda$, prorsus ad eandem perueniemus aequationem, vnde similis valor pro cos. $\Phi$ deriuatur.

§. 34. Quia pro Ellipsi supposuimus

$$\frac{\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cos.}\,\Phi} = \frac{e+\text{cos.}\,\psi}{\text{sin.}\,\psi},\quad \frac{1+e\,\text{cos.}\,\psi}{e+\text{cos.}\,\psi} = \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}}{\text{sin.}\,\Phi},$$

hinc diuidendo per $e$,

$$\frac{1-e^2}{e+\text{cos.}\,\psi} = \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}-e\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{sin.}\,\Phi} \text{ et}$$

$$e+\text{cos.}\,\psi = \frac{(1-e^2)\,\text{sin.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}-e\,\text{sin.}\,\Phi},$$

quare fiet

$$\text{cos.}\,\psi = \frac{\text{sin.}\,\Phi - e\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}}{\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}-e\,\text{sin.}\,\Phi)},$$

tumque

$$\text{sin.}\,\psi = \frac{\sqrt{(1-e^2)}\,(e+\text{cos.}\,\Phi)}{\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}-e\,\text{sin.}\,\Phi},$$

ex his vero formulis quum elegans aliqua constructio elici nequeat, negotium alio modo tentabimus. Sit igitur A C D B ellipsis cuius axis est A B et focus in F, tumque ductae concipiantur rectae F C, F D ea ratione, vt cum A F constituant angulos A F C $= \Phi$ et A F D $= \psi$, ita comparatos, vt sit $\frac{\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cos.}\,\Phi} = \frac{e+\text{cos.}\,\psi}{\text{sin.}\,\psi}$, et rectae C E, D E normales ad Ellipsin in punctis C et D; eritque ex nota proprietate Sectionum Conicarum F C : F E = F D : F G in data ratione $= 1 : e$. In triangulo igitur F C E, habebimus C E $= v\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}$, linea scilicet F C per $v$ indigitata, quare si angulus C E F per $\theta$ exprimatur, erit $\text{sin.}\,\theta = \frac{v\,\text{sin.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cos.}\,\Phi+e^2)}}$, hinc itaque ex valore pro cos. $\psi$ supra allato, colligitur

Tab. I. Fig. 6.

$$\text{cos.}\,\psi = \frac{\text{sin.}\,\theta - e}{1-e\,\text{sin.}\,\theta},\ \text{indeque}\ \frac{1-\text{cos.}\,\psi}{1+\text{cos.}\,\psi} = \frac{(1+e)\,(1-\text{sin.}\,\theta)}{(1-e)\,(1+\text{sin.}\,\theta)}.$$

 Si

Si nunc ex puncto F in CE ducatur perpendicularis FK et ponatur angulus EFK $= \eta = 90 - \theta$, erit

$$\frac{1 - \cos.\psi}{1 + \cos.\psi} = \frac{1 + e}{1 - e} \cdot \frac{1 - \cos.\eta}{1 + \cos.\eta},$$

hincque si $e$ statuatur $= \cos.\gamma$,

$$\frac{1 - \cos.\psi}{1 + \cos.\psi} = \frac{1 + \cos.\gamma}{1 - \cos.\gamma} \cdot \frac{1 - \cos.\eta}{1 + \cos.\eta},$$

vnde deducitur Tang. $\frac{1}{2}\psi = \cot.\frac{1}{2}\gamma$ Tang. $\frac{1}{2}\eta$. Simili ratione pro Hyperbola formula satis concinna, determinatio anguli $\psi$ tradi potest, cui tamen explicandae non est vt heic immoremur.

§. 35. Leui adhibita attentione patet, esse

$$\text{Tang.}\,\theta = \frac{\sin.\phi}{e + \cos.\phi},$$

vnde si consimili modo angulus DGF per $\theta'$ exprimatur, erit:

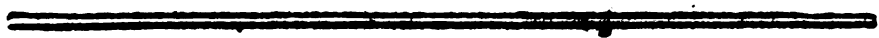
$$\text{Tang.}\,\theta' = \frac{\sin.\psi}{e + \cos.\psi}, \text{ ideoque}$$

$$\text{Tang.}\,\theta\ \text{Tang.}\,\theta' = \frac{\sin.\phi \sin.\psi}{(e + \cos.\phi)(e + \cos.\psi)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - e^2)}} = \frac{1}{\sin.\gamma},$$

vnde elegans ista deducitur proprietas, productum tangentium ex angulis CEF, DGF esse constans. Caeterum de relatione angulorum $\phi$ et $\psi$ sequentia notari merentur: 1°. Pro angulo $\phi$ euanescente, erit $\cos.\psi = -e$, ideoque $\psi = 180° - \gamma$, vbi facile perspicitur angulum $\gamma$ illum esse, quem recta a foco Ellipsis ad verticem axis minoris ducta, cum axe principali Ellipseos constituit. 2°. Aucto angulo $\phi$ diminuetur angulus $\psi$, qui euanescet dum statuitur $\phi = 180° - \gamma$. 3°. Si angulus $\phi$ adhuc augeatur vltra hunc limitem $\phi = 180° - \gamma$, fiet angulus $\psi$ negatiuus. 4°. Si $\phi = 180°$, fiet $\psi = \gamma - 180°$.

§. 36. Plurima quidem adhuc reſtarent obſeruanda de reductione formularum differentialium ad rectificationes Sectionum Conicarum, verum quum ea heic ſingula exſequi non liceat, alia Diſſertatione, quae hic nondum expoſita ſunt, luculentius pertractabimus.

---

---

# DE INFINITIES INFINITIS GRADIBVS TAM INFINITE MAGNORVM QVAM INFINITE PARVORVM.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Si $x$ denotet quantitatem infinite magnam, tum ista progreſſio geometrica 1, $x$, $xx$, $x^3$, $x^4$, $x^5$, etc. ita eſt comparata, vt quilibet terminus ſit infinities maior praecedente, at vero infinities minor ſequente. Vnde ſi poteſtatem $x^{1000}$ tanquam vltimum terminum huius progreſſionis ſpectemus, inter terminum primum 1 et eum ſtatui poterunt mille gradus diuerſi infinite magnorum, vbi quidem ad eundem gradum referimus omnes quantitates finitam rationem inter ſe tenentes. Neque tamen iſte numerus millenarius omnes gradus intermedios inter 1 et $x^{1000}$ exhibet; vbi obſeruandum, quae hic de numero determinato 1000 dicuntur, de quolibet alio numero, quantumuis magno, eſſe intelligenda.

§. 2. Plurimum abeſt, vti modo diximus, vt illa progreſſione omnes gradus intermedii inter 1 et $x^{1000}$, qui quidem ſint diuerſi, repraeſententur. Si enim ponamus $x = y^{1000}$ vt ſit

$y =$

$y = \sqrt[1000]{x}$, ob $x$ quantitatem infinitam etiamnunc $y$ erit quantitas infinita; vnde sequitur, quia inter 1 et $y^{1000}$ denuo mille gradus intermedii assignari possunt, quorum quilibet pariter infinities maior est quam praecedens, infinities vero minor quam sequens, etiam inter vnitatem et $x$ denuo mille gradus intermedios constitui posse, etiamsi ante $x$ fuisset primus gradus infiniti. Simili vero modo etiam inter praecedentem gradum primum $x$ et secundum $xx$ iterum mille gradus intermedii constitui possunt, atque adeo inter binos quosuis gradus proximos, qui omnes ita sunt comparati, vt quilibet sit infinities maior quam praecedens, infinities vero minor quam sequens.

§. 3. Neque vero hic subsistere cogimur. Cum enim sit $y$ quantitas infinite magna, si ponamus $y = z^{1000}$, etiamnunc $z$ erit quantitas infinite magna; vnde intelligitur, inter 1 et $z^{1000}$, hoc est inter 1 et $y$, denuo mille gradus intermedios infinitorum constitui posse, atque hoc modo vlterius progredi licet, quousque libuerit, ita vt numerus omnium graduum diuersorum reuera in infinitum augeri possit.

§. 4. Haec eadem quoque inuerso modo valent de infinite paruis. Si enim $x$ denotet quantitatem infinite paruam huius progressionis geometricae: $1, x, xx, x^3 \ldots x^{1000}$, quilibet terminus infinities minor est quam praecedens, at vero infinities maior quam sequens, hincque inter 1 et $x^{1000}$ adipiscimur mille gradus intermedios infinite paruorum, omnes diuersos; quandoquidem quilibet infinities minor est praecedente, infinities vero maior sequente.

§. 5.

§. 5. Quod si iam vlterius ponamus $x = y^{1000}$, vt sit $y = \sqrt[1000]{x}$, etiamnunc $y$ erit quantitas infinite parua; vnde patet inter 1 et $y^{1000}$, hoc est inter 1 et $x$, denuo mille gradus infinite paruorum intermedios constitui posse, quod etiam fieri poterit inter $x$ et $xx$, similique modo inter $xx$ et $x^3$, atque in genere inter binos quosuis proximos praecedentis seriei; et quia, posito vlterius $y = z^{1000}$, etiamnunc $z$ est quantitas infinite parua, numerus graduum diuersorum denuo millies euadet maior, quae multiplicatio vlterius sine fine continuari poterit.

§. 6. Haec quidem, quae ex consideratione potestatum sunt deducta, in vulgus sunt notissima, atque adeo ad Algebram communem referri possunt; verum Analysis sublimior praeterea suppeditat innumerabiles alios gradus tam infinite magnorum quam paruorum, quae nullo modo in vllo eorum graduum, quos modo commemorauimus, quantumuis etiam multiplicentur, comprehendi possunt, sed perpetuo vel infinities maiores, vel minores deprehenduntur quam vllus graduum praecedentium, quod cum nusquam satis clare explicatum esse memini, operae pretium erit hic fusius perpendisse.

§. 7. Tales autem quantitates in Analysi sublimiori occurrentes ad duas classes referri possunt, quarum altera complectitur logarithmos, altera vero quantitates exponentiales. De logarithmis igitur primum agamus, ac denotante $x$ numerum infinite magnum, constat quoque eius logarithmum esse infinite magnum. Perinde autem hic est, quonam canone logarithmorum vti velimus, siue communibus, siue hyperbolicis, siue quouis alio genere.

§. 8.

§. 8. Quando autem $x$ est numerus infinite magnus, per se satis clarum est, eius logarithmum, hoc est $lx$, infinitum quidem, attamen infinities esse minorem ipso numero $x$, quam ob rem ad gradum quempiam inferiorem referri debebit. Quoniam igitur gradus ipso $x$ inferiores per $x^{\frac{1}{n}}$ repraesentari possunt, denotante scilicet $n$ numerum quantumuis magnum, haud difficulter ostendi potest, semper esse $lx$ infinities minorem quam $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam magnus numerus pro $n$ accipiatur.

§. 9. Sequenti autem modo demonstrare licet, semper $x^{\frac{1}{n}}$ infinities maius esse quam $lx$, siquidem $x = \infty$, siue valorem huius fractionis $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{lx}$ semper esse infinite magnum. Statuatur enim iste valor $= v$, vt sit $v = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{lx}$, ac ponatur $p = \frac{1}{lx}$ et $q = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$, eritque $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator $p$ quam denominator $q$ fit $= 0$ casu $x = \infty$; quam ob rem secundum regulam notissimam erit quoque $v = \frac{dp}{dq}$. Cum igitur sit $dp = -\frac{dx}{x(lx)^2}$ et $dq = \frac{-dx}{nx^{\frac{1}{n}+1}}$, erit $v = \frac{nx^{\frac{1}{n}}}{(lx)^2}$, quem ergo valorem praecedenti $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{lx}$ aequalem esse oportet. At vero sumtis quadratis ex praecedente fit $vv = \frac{x^{\frac{2}{n}}}{(lx)^2}$, qui valor per

 posteri-

posteriorem diuisus praebet $v = n x^{\frac{1}{n}}$, qui cum manifesto sit infinitus, etiam patet esse $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{l x}$ quantitatem infinite magnam, siue semper esse $l x$ quantitatem infinities minorem quam $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam magnus numerus pro $n$ accipiatur.

§. 10. Hinc igitur manifestum est, si fuerit $x = \infty$, tum eius logarithmum $l x$ ad nullum gradum superiorum infinitorum referri posse, quantumuis etiam illi gradus per continuam multiplicationem coarctentur. Quam ob rem hic constitui debebit nouus plane gradus infiniti, classificationi logarithmi $l x$ conueniens, ad quem scilicet potestas $x^{\frac{1}{n}}$ continuo propius accedat, quo maior statuatur numerus $n$. Neque tamen idcirco casus quo $n = \infty$ satisfacit, quia ob $\frac{1}{n} = 0$ foret $x^{\frac{1}{n}} = 1$, cum tamen $l x$ sit infinitus; verum probe notandum est, demonstrationem ante allatam praebuisse $n x^{\frac{1}{n}}$, vnde sumto etiam $n = \infty$ nihilominus prodit $v = n$, ideoque adhuc infinitum.

§. 11. Cum igitur $l x$ constituat quasi gradum infimum omnium quantitatum infinite magnarum, euidens est, hinc numerum graduum supra constitutorum, qui iam erat infinitus, insuper in infinitum augeri debere. Si enim contemplemur gradum quemcunque potestate $x^{\alpha}$ designatum, manifestum est, hanc formulam: $x^{\alpha} l x$, infinities esse maiorem quam $x^{\alpha}$; statim vero atque exponens $\alpha$ fractione quam minima $\frac{1}{n}$ augetur, tum certe formula $x^{\alpha} l x$ infi-

nities erit minor quam $x^{\alpha+\frac{1}{n}}$, ideoque necessario inter gradus $x^{\alpha}$ et $x^{n}$ constitui debebit.

§. 12. Verum hoc modo neutiquam adhuc multitudo omnium graduum diuersorum exhauritur. Etsi enim $(lx)^2$ sit infinities maior, quam $lx$, ideoque peculiarem gradum constituere debeat: tamen adhuc infinities minor est quam potestas $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam numerus $n$ augeatur. Simili porro modo omnes diuersae potestates ipsius $lx$ peculiares prorsus praebent casus infinitorum, id quod adeo ad exponentes fractos est extendendum, cum $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ certe infinities maior sit quam $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}}$, attamen infinities minor quam $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{n}}$, ideoque peculiarem gradum constituere debeat. Totidem vero etiam noui Casus exsurgent, si insuper per potestatem quamcunque ipsius $x$ multiplicemus: scilicet formula $x^{\alpha}(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ infinities maior quam $x^{\alpha}(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}}$, interim tamen infinities minor est quam $x^{\alpha}(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{n}}$.

§. 13. Neque vero adhuc hoc modo omnes gradus infinitorum enumerari possunt. Quia enim $lx$ est quantitas infinite magna, etiamnunc eius logarithmus $llx$ erit infinitus, etiamsi infinities minor quam $lx$; vnde patet, ex hac formula: $llx$, eiusque potestatibus $(llx)^{\frac{m}{\epsilon}}$ insuper infinitos nouos gradus infinitorum statui debere, imprimis si haec formula non solum cum pote-

 statibus

statibus ipsius $lx$ sed etiam cum potestatibus ipsius $x$ combinetur; haecque consideratio adeo vlterius ad formulas $lllx$, $llllx$, etc. extendi poterit.

§. 14. Immensa haec graduum multitudo etiam locum habet in infinite paruis, quippe quae spectari possunt vt reciproca infinite magnorum, quoniam quodlibet infinitum $\infty$, si vnitas per id diuidatur, scilicet $\frac{1}{\infty}$, peculiarem gradum infinite parui constituere censeri debet. Ita si $x$ sit quantitas infinita, non solum haec series: $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{xx}$; $\frac{1}{x^3}$; $\frac{1}{x^4}$; etc. infinitos gradus infinite paruorum suppeditat, sed etiam haec series: $\frac{1}{lx}$; $\frac{1}{(lx)^2}$; $\frac{1}{(lx)^3}$; $\frac{1}{(lx)^4}$; etc. vna cum omnibus potestatibus singulorum terminorum nouos gradus infinite paruorum praebet; tum vero etiam series $\frac{1}{llx}$; $\frac{1}{(llx)^2}$; $\frac{1}{(llx)^3}$; etc. atque adeo omnes sequentes, vbi signum logarithmi vlterius multiplicatur, hanc multitudinem in immensum adaugent.

§. 15. Quae hactenus de logarithmis sunt tradita simili modo extendi possunt ad quantitates exponentiales, vnde pariter innumerabiles noui gradus tam infinite magnorum quam infinite paruorum constitui possunt, qui a praecedentibus prorsus erunt diuersi. Si enim vt hactenus $x$ denotet numerum infinitum, notum est valorem potestatis $a^x$ etiam esse infinite magnum, quoties scilicet numerus $a$ vnitatem superauerit; sin autem fuerit $a < 1$, eandem potestatem $a^x$ exhibere quantitatem infinite paruam. Consideremus autem primo infinite magna, sumendo $a > 1$,

atque

atque manifestum est potestatem $a^x$ infinities non solum superare ipsum exponentem, verum adeo demonstrari potest, semper fore $a^x$ quantitatem infinities maiorem quam potestatem $x^n$, quantumuis magnus etiam fuerit exponens $n$. Demonstratio autem sequenti modo se habet.

§. 16. Ponatur $\frac{a^x}{x^n} = v$, sitque $p = \frac{1}{x^n}$ et $q = \frac{1}{a^x}$, vt fiat $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator $p$ quam denominator $q$ casu $x = \infty$ euanescit, sicque erit etiam $v = \frac{dp}{dq}$. Est vero $dp = -\frac{n\,dx}{x^{n+1}}$ et $dq = -\frac{dx\,la}{a^x}$, vnde fit $v = \frac{n\,a^x}{x^{n+1}\,la}$, quae quidem formula multo magis est complicata quam ipsa proposita $v = \frac{a^x}{x^n}$, ita vt hinc nihil concludi posse videatur. Interim tamen ex harum formularum comparatione verus valor ipsius $v$ concludi poterit. Cum enim ex priore sit $v^{n+1} = \frac{a^{x(n+1)}}{x^{n(n+1)}}$, ex posteriore vero $v^n = \frac{n^n\,a^{nx}}{x^{n(n+1)}(la)^n}$, prior valor per posteriorem diuisus dabit $v = \frac{a^x(la)^n}{n^n}$, qui valor manifesto est infinitus. Sicque demonstratum est, formulam $a^x$ semper esse infinities maiorem quam $x^n$, quantumuis etiam magnus capiatur exponens $n$, dummodo fuerit $a > 1$. Hinc igitur

tur patet, quantitatem exponentialem $a^x$ omnes gradus infinitorum ex poteſtate $x^n$ oriundorum infinities ſuperare. Hinc, quamquam $x$ eſt quantitas infinita, tamen omnes iſtae fractiones: $\frac{a^x}{x}$; $\frac{a^x}{xx}$; $\frac{a^x}{x^3}$; et in genere $\frac{a^x}{x^n}$ ad tantum gradum infiniti exſurgunt, vt omnes gradus infinitorum primae claſſis excedant. Manifeſtum autem eſt haec eadem valere de formulis $a^{\alpha x}$, dummodo fuerit $\alpha > 0$; atque adeo etiam valet de formulis $a^{\alpha x^\beta}$, ſi modo literis $\alpha$ et $\beta$ valores poſitiui tribuantur; quae ergo infinita infinities ſunt altiora quam poteſtates ipſius $x$, quantumuis fuerint magnae.

§. 17. Praeterea etiam notandum eſt, etiamſi formula $a^x$ ad gradum infiniti infinite alti pertineat: tamen, ſimul ac valor litterae $a$ quam minime augeatur, valorem huius formulae adhuc infinities euadere altiorem. Si enim fuerit $b > a$, tum formula $a^x$ ſe habebit ad formulam $b^x$, vt 1 ad $(\frac{b}{a})^x$, hoc eſt, vt 1 ad infinitum infinitiſimi gradus.

§. 18. Quando autem $a > 1$, tum omnes huiusmodi poteſtates $a^x$ reuocari poſſunt ad poteſtates numeri fixi $e$, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, cum ſit $a^x = e^{x\, l a}$; ſicque omnia huius generis infinita repraeſentari poterunt ſub hac forma $e^{\alpha x^\beta}$, exiſtente $\alpha > 0$ et $\beta > 0$; tum vero etiamnunc iſta formula $\frac{e^{\alpha x^\beta}}{x^n}$ ad gradum infinitesi-

nitesimum infinitorum referri debebit. Multo magis etiam hi gradus infinitesimi in infinitum eleuari poterunt, si loco $a x^{\varepsilon}$ scribamus $e^{\alpha x^{\varepsilon}}$, quo pacto peruenietur ad hanc formam: $e^{e^{\alpha x^{\beta}}}$; haecque augmentatio vlterius sine fine continuari poterit.

§. 19. Omnia haec inuerso modo ad infinite parua transferri possunt, quae iam aliquanto accuratius perpendamus. Denotet igitur litera $x$ quantitatem infinite paruam, cuius ergo potestates singulae $x^{\alpha}$ innumeros gradus infinite paruorum suppeditant, quoniam aucto vel minimum exponente $\alpha$ formula euadit infinities minor. Hos autem gradus omnes sub prima classe infinite paruorum complectamur, si modo exponenti $\alpha$ omnes valores positiui tribui intelligantur.

§. 20. Ad secundam vero classem referamus ea infinite parua, quae ex logarithmis nascuntur. Quoniam enim $l\frac{1}{x}$ est infinitus, eius reciprocum $\frac{1}{l\frac{1}{x}}$ erit infinite paruum. Ponamus autem commoditatis gratia $l\frac{1}{x} = u$, vt ista forma fiat $\frac{1}{u}$, quae erit tale infinite paruum, quod omnia infinite parua primae classis infinities superat. Ad hanc classem quoque pertinebunt formulae $\frac{1}{uu}$; $\frac{1}{u^3}$, $\frac{1}{u^4}$ etc. et in genere $\frac{1}{u^{\alpha}}$. Tum vero etiam huc referendae erunt

formae

formae $\frac{x^{\alpha}}{u^{\varepsilon}}$, quae quasi mixtae sunt ex prima et secunda classe. Praeterea vero, quia adhuc est $l\,u$ infinite magnum, sed infinities minor quam $u$, eius reciprocum $\frac{1}{l\,u}$ erit infinite paruum, sed infinities maius quam $\frac{1}{u}$. Simili modo hae formulae: $\frac{1}{l.\,l.\,u}$ et $\frac{1}{l.\,l.\,l.\,u}$ erunt infinite parua continuo infinities maiora praecedentibus; vnde ergo per compositionem cum superioribus innumerabiles noui gradus infinite paruorum constitui poterunt, quos enumerare nequaquam licet.

§. 21. In hoc genere autem imprimis notari debet, quod, etiamsi $u = l\frac{1}{x}$ sit infinite magnum, tamen producta $x^n u$ omnia esse infinite parua, si modo fuerit $n > 0$. Etsi hoc ex praecedentibus sequatur, tamen ita succincte demonstrari potest. Ponatur $x^n u = v$, sitque $x^n = p$ et $\frac{1}{u} = q$, vt fiat $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator quam denominator euanescit casu $x = 0$, vnde quoque erit $v = \frac{dp}{dq}$. Est vero $d\,p = n\,x^{n-1}\,d\,x$, et quia $u = l\frac{1}{x}$, siue $u = -l\,x$, erit $d\,u = -\frac{dx}{x}$, ideoque $d\,q = \frac{dx}{x\,u\,u}$, vnde fit $v = n\,x^n\,u\,u$. Quare cum ex priore valore fit $v\,v = x^{2n}\,u\,u$, hic per modo inuentum diuisus dat $v = \frac{x^n}{n}$; vnde patet valorem ipsius $v$ esse infinite paruum, id quod etiam valebit de formula $x^n\,u^{\alpha}$, hocque non solum quando $\alpha$ est numerus positiuus, sed etiam quando

do est negatiuus, cum formula $\frac{x^n}{x^m}$ per se fit infinite parua.

§. 22. Praeter has autem duas classes infinite paruorum, quantitates exponentiales tertiam nobis praebebunt classem. Cum enim ob $x = 0$ formula $e^{\frac{1}{x}}$ praebeat infinite magnum quasi supremi ordinis, eius reciprocum $\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = e^{-\frac{1}{x}}$ dabit infinite paruum etiam supremi ordinis, quod scilicet infinities erit minus quam vllum infinite paruum primae classis, id quod etiam tenendum est de formula generali $\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{x^\beta}}}$. Ponamus autem breuitatis gratia $e^{\frac{\alpha}{x^\beta}} = v$, vt haec infinite parua comprehendi queant in hac forma $\frac{1}{v}$. Cum igitur hinc fit $lv = \frac{\alpha}{x^\beta}$, erit differentiando,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\alpha\beta\, dx}{x^{\beta+1}}, \text{ ideoque } dv = -\frac{\alpha\beta\, v\, dx}{x^{\beta+1}}.$$

Praeterea vero hic imprimis notandum est, etiamsi $x$ fit quantitas euanescens, tamen has formulas $\frac{1}{x^n v}$ etiamnunc exprimere infinite parua supremi ordinis.

§. 23. His iam classibus constitutis insignia subsidia tam pro differentiatione quam integratione talium infinite paruorum reperiri possunt, quemadmodum enim si pro prima classe ponatur $a x^\alpha = y$ fit $\frac{dy}{dx} = \alpha a x^{\alpha-1}$ et

$\int y\,dx = \frac{a}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$, patet, hoc integrale infinities minus esse quam $y$, dum contra differentiale $\frac{dy}{dx}$ infinities est maius, atque adeo fieri queat infinite magnum, si $\alpha < 1$; id quod etiam de infinite paruis reliquarum classium est intelligendum.

§. 24. Consideremus nunc infinite paruum secundae classis, ac posito $l\frac{1}{x} = u$, vt sit $du = -\frac{dx}{x}$, statuamus $y = a x^{\alpha} u^{m}$, vbi sit $\alpha > 0$, $m$ vero numerus siue positiuus, siue negatiuus, siquidem vtroque casu haec formula est infinite parua. Hinc igitur fiet

$$\frac{dy}{dx} = \alpha a x^{\alpha-1} u^{m} - a m x^{\alpha-1} u^{m-1} = a x^{\alpha-1} u^{m-1} (\alpha u - m),$$

quia autem $u$ est infinitum, reiecto termino posteriore $-m$ erit $\frac{dy}{dx} = \alpha a x^{\alpha-1} u^{m}$, vnde per $dx$ multiplicando et integrando fit $\int \alpha a x^{\alpha-1} u^{m} dx = y = a x^{\alpha} u^{m}$, vnde hanc nanciscimur integrationem satis memorabilem:

$\int x^{\alpha-1} u^{m} dx = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} u^{m}$, siue loco $\alpha - 1$ scribendo $\mathfrak{G}$ erit

$$\int x^{\mathfrak{G}} u^{m} dx = \frac{1}{\mathfrak{G}+1} x^{\mathfrak{G}+1} u^{m}.$$

§. 25. Hinc ergo si concipiamus lineam curuam, cuius abscissae $x$ respondeat applicata $y = a x^{\mathfrak{G}} u^{m}$, vbi sit $\mathfrak{G} > 1$, et exponens $m$ siue positiuus siue negatiuus, huius curuae applicata in ipso initio, vbi $x = 0$, euanescet, area vero huius curuae abscissae $x$ infinite paruae respondens

erit

erit $\int y\,dx = \frac{a}{\beta+1} x^{\beta+1} u^{m} = \frac{1}{\beta+1} xy$: aequabitur scilicet rectangulo ex abscissa $x$ in applicatam $y$, diuiso per $\beta+1$, quod eo magis est memorabile, quia formula $x^{\beta} u^{m} dx$ nullo modo integrari potest, praeter casus paucissimos, quibus exponens $m$ est numerus integer positiuus.

§. 26. Consideremus nunc quoque infinite parua tertiae classis, ac ponamus breuitatis gratia vt supra

$$e^{\frac{a}{x^{\beta}}} = v, \text{ vt sit } dv = -\frac{a\beta v\,dx}{x^{\beta+1}},$$

eritque, vt vidimus, haec formula $\frac{x^m}{v}$ semper quantitas infinite parua, siue exponens $m$ fuerit positiuus, siue negatiuus. Quodsi ergo ponatur $\frac{x^m}{v} = z$, erit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m x^{m-1} + a\beta x^{m-\beta-1}}{v} = \frac{x^{m-\beta-1}}{v}(m x^{\beta} + a\beta)$$

vbi quia $m x^{\beta}$ euanescit prae $a\beta$ erit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a\beta x^{m-\beta-1}}{v}$$

vnde vicissim integrando erit

$$z = a\beta \int \frac{x^{m-\beta-1}\,dx}{v} = \frac{x^m}{v},$$

ideoque si loco $m-\beta-1$ scribamus $n$, ita vt $n$ sit numerus quicunque siue positiuus siue negatiuus, semper erit

$$\int \frac{x^n\,dx}{v} = \frac{1}{a\beta} \frac{x^{n+\beta+1}}{v},$$

quae integratio vera est, quamdiu $x$ est infinite paruum,

cum tamen formula differentialis omnem integrationem respuat.

§. 27. Quodsi ergo linea curua concipiatur, cuius abscissae $x$ respondeat applicata $y = \frac{a x^n}{v}$, existente $v = e^{\frac{\alpha}{x^{\beta}}}$, vbi $\alpha$ et $\beta$ sint numeri positiui, exponens vero $n$ quicunque siue positiuus siue negatiuus, applicata huius curuae in ipso initio vbi $x = 0$ etiam euanescet, huius vero curuae area abscissae $x$ infinite paruae respondens erit

$$\int y\, dx = \frac{a}{\alpha \beta} \cdot \frac{x^{n+\beta+1}}{v} = \frac{1}{\alpha \beta} x^{\beta+1} y,$$ hinc ergo si fuerit $y = \frac{a x^n}{e^{\frac{1}{x}}}$, vbi $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ erit $\int y\, dx = x x y$. Hoc est area curuae aequabitur rectangulo ex quadrato abscissae in applicatam.

§. 28. Quodsi iam vicissim quaeramus curuam cuius area in genere debeat esse $\int y\, dx = x x y$, peruenitur ad hanc aequationem differentialem: $y\, dx = 2 x y\, dx + x x\, dy$ vnde fit

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx(1 - 2x)}{xx}$$

indeque integrando:

$$l y = -\frac{1}{x} - 2\, l x,$$ atque ad numeros progrediendo

$$y = \frac{a}{x x\, e^{\frac{1}{x}}},$$ quae in forma proposita continetur,

si ca-

si capiatur $n = -\infty$, at vero superior integratio locum habet quando $x$ infinite paruum.

---

§. 29. Postrema autem integratio etiam valet, si quantitas infinite parua insuper classem secundam vtcunque inuoluat. Posito enim $l\frac{1}{x} = u$, si statuamus $z = \frac{a x^m u^n}{v}$ (vbi exponentes $m$ et $n$ tam negatiue quam positiue accipi possunt, quandoquidem haec quantitas semper est infinite parua, dummodo fuerit $v = e^{\frac{\alpha}{x^{\beta}}}$) atque vt valorem $\frac{dz}{dx}$ facilius eruamus, sumamus logarithmos, erit

$$lz = la + m\,lx + n\,lu - lv \text{ ideoque}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{m\,dx}{x} + \frac{n\,du}{u} - \frac{dv}{v}. \text{ Quia vero est}$$

$$du = -\frac{dx}{x} \text{ et } dv = -\frac{\alpha\beta\,dx}{x^{\beta+1}}\,v$$

binis his valoribus in superiore expressione substitutis ea sequentem induet formam:

$$\frac{dz}{z\,dx} = \frac{m}{x} - \frac{n}{ux} + \frac{\alpha\beta}{x^{\beta+1}},$$

vbi cum sit $\beta + 1 > 1$, ambo termini priores prae tertio euanescunt, sicque erit concinnius

$$\frac{dz}{z\,dx} = \frac{\alpha\beta}{x^{\beta+1}}, \text{ ideoque } dz = \frac{a\alpha\beta\,x^{m-\beta-1}\,u^n}{v}\,dx.$$

§. 30. Quodsi iam hic loco $m - \beta - 1$ scribamus $k$, ita vt $k$ aeque ac $n$ denotent numeros quoscunque tam positi-

positiuos quam negatiuos, ob $n = k + \beta + 1$ semper erit

$$\int \frac{x^k u^m dx}{v} = \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{x^{k+\beta+1} u^m}{v}$$

ideoque si fuerit $\frac{x^k u^m}{v} = y$, et $y$ spectetur vt applicata curuae, eius area erit

$$\int y\, dx = \frac{1}{\alpha\beta} \cdot y x^{\beta+1},$$

quamdiu scilicet fuerit $x$ infinite paruum, quod eo magis est notatu dignum, quia nulla adhuc via inuenta est huiusmodi integrationes instituendi.

# PHYSICO-
# MATHEMATICA.

# DETERMINATIO ONERVM, QVAE COLVMNAE GESTARE VALENT.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

In Tomo XIII. Actorum Academiae Berolinensis exhibui commentationem de vi columnarum; vbi ex principio prorsus singulari, quod ab hoc argumento penitus alienum videatur, determinaui quantitatem oneris, quod data quaeuis columna sustinere valeat, quin rumpatur. Ista determinatio mihi ob hanc causam non solum prorsus noua, sed etiam maxime memorabilis est visa, quandoquidem in gestatione onerum vera natura columnarum constitui debet, idque eo magis, quod vulgo ab Auctoribus, qui doctrinam de columnis tractauerunt, hoc argumentum penitus negligi solet, dum potissimum in describendis ordinibus et ornamentis columnarum sunt occupati. Quin etiam Scriptores physici, qui tenacitatem et cohaesionem corporum solidorum sunt perscrutati, experimenta quidem instituerunt circa vires, quas exiguae columnae sustinere valeant, neque vero in legem et proportionem inquisiuerunt, quam quantitas

oneris sustinendi, tam ratione crassitiei, quam altitudinis sequatur.

§. 2. Non parum igitur sum miratus, cum nuper celeberrimam Encyclopediam Gallicam euoluerem, quod sub titulo columnarum disertis verbis ipsa mea proportio, quasi in vulgus cognita, in medium profertur, secundum quam onera, quae columnae cylindricae eiusdem diametri gestare valent, rationem reciprocam duplicatam altitudinum tenere perhibentur; ita vt columna duplo altior quartam tantum partem oneris sustinere queat; neque vero vllus auctor allegatur, qui hanc proportionem siue ex experimentis concluserit, siue per theoriam confirmauerit.

Tab. II. Fig. 1.

§. 3. Quando autem quaeritur, quantum onus O data quaeuis columna A B C D pro ratione altitudinis et crassitiei gestare valeat, quaestio sine dubio maxime est ardua; neque enim video, quomodo ea ex cognitis principiis, circa soliditatem corporum stabilitis, resolui possit. Quoniam enim onus O perpendiculariter deorsum premit, nulla prorsus vis adesse videtur, quae columnam rumpere tendat, quantumuis etiam magnum fuerit onus; propterea quod nulla ratio deprehenditur, cur columna potius versus vnam regionem, quam quamuis aliam inflectatur et frangatur. Interim tamen experientia satis declarat, tale onus non vltra certos limites augeri posse, atque adeo in natura nunquam causae desunt, quae rupturam in vnam plagam potius, quam omnes alias producant. Neque tamen a quoquam Auctore eiusmodi principia stabilita esse reperio, vnde solutionem huius quaestionis petere liceat.

§. 4.

§. 4. Quin etiam ipse praeter omnem expectationem ad enodationem huius quaestionis sum perductus, cum olim incuruationem laminarum elasticarum, quae ipsis a viribus quibuscunque inducatur, inuestigarem. Cum enim laminam elasticam A C B essem contemplatus, quae tensione chordae A B in statum incuruatum A C B fuerit reducta, et pro quouis gradu incuruationis quantitatem tensionis chordae essem perscrutatus, non sine admiratione inveni, incuruationem adeo infinite paruam iam tensionem finitam postulare, ita vt, quamdiu chorda A B, vtrique termino laminae elasticae alligata, vi quacunque minore intendatur, laminam nullam plane inflexionem, ne infinite quidem paruam, esse passuram, cum tamen eidem laminae A C B, parieti in B infixae, etiam a minima vi A a quaedam incuruatio inducatur.

Tab. II. Fig. 2.

Fig. 3.

§. 5. Quanquam autem columna maxime discrepat a lamina elastica, tamen in hoc egregie conueniunt, quod columna a pondere incumbente rumpi nequeat, nisi ipsi ante vel minima quaedam inflexio inducatur. Quoniam igitur pondus incumbens simili modo in columnam agit, quo lamina elastica A C B (Fig. 2.) a chorda A B sollicitatur, euidens est, etiam columnae ne minimam quidem inflexionem induci posse, nisi pondus incumbens certum quendam limitem superauerit. Consideremus enim columnam A B C D, cui ab incumbente pondere iam inflexio infinite parua sit inducta, qua eius axis curuaturam infinite paruam O V P acceperit, ita vt recta O P sit verticalis, et quoniam onus incumbens secundum hanc ipsam directionem O P vrget, eandem vim manifesto exerit, ac si chorda recta O P pari vi se contrahere anniteretur; ex

Fig. 4.

 quo

quo ſimilitudo cum lamina elaſtica ſupra conſiderata manifeſto elucet, ſimulque intelligitur, columnam talem inflexionem, etiamſi infinite paruam, recipere non poſſe, niſi onus incumbens certum quendam limitem ſuperauerit, atque hic ipſe limes nobis maximum onus indicat, quod columna ſuſtinere valebit.

§. 6. Quemadmodum autem quaeuis incuruatio, quae laminae elaſticae induci debet, certam requirit vim, ita etiam facile intelligitur, certam quandam vim requiri, quae columnae noſtrae incuruationem inducere valeat, quandoquidem ea tam ob ſoliditatem, quam cohaeſionem partium omni incuruationi reſiſtit, quae reſiſtentia ſine dubio eo maior eſt cenſenda, quo craſſior fuerit ipſa columna et quo maior ſimul fuerit incuruatio. Ad talem effectum explicandum in calculum introduci ſolet formula quaepiam rigorem abſolutum corporis inflectendi exprimens, quae per radium curuaturae diuiſa praeciſe aequalis euadat momento virium ad hanc ipſam incuruationem producendam requiſito; vnde cum momenta virium ſint producta ex vi agente ſeu quodam pondere per quampiam lineam rectam multiplicato, euidens eſt formulam, qua rigor abſolutus exprimitur, eſſe debere productum ex quopiam pondere et quadrato cuiuspiam lineae rectae, ita vt ſi per radium oſculi diuidatur, prodeat formula ſimilis ei, qua momenta virium exprimuntur.

§. 7. Quo noſtram inueſtigationem a caſu ſimpliciſſimo exordiamur, contemplemur primo eiusmodi columnam, quae per totam ſuam altitudinem eandem habeat craſſitiem, ita vt rigor abſolutus, quo omni incuruationi reſi-

resistit, habeat vbique eandem quantitatem, quam ergo exprimamus formula $Ekk$, vbi $E$ certum designet pondus, $k$ autem certam lineam rectam. Hic quidem in genere statim patet, quo crassior fuerit columna, et quo maiore soliditate praedita, eo maiorem fore valorem formulae $Ekk$. Infra autem ostendemus, si huiusmodi columnae fuerint cylindricae, ex materia eiusdem soliditatis formatae, tum formulam $Ekk$ proportionalem fore biquadrato diametri crassitiei.

§. 8. Dum autem columnae cylindricae certae crassitiei tribuimus rigorem $= Ekk$, valorem huius formulae haud difficulter per experimenta assignare licebit. Concipiamus enim, talem columnam, cuius axem tantum hic in figura repraesentamus, in B pauimento firmo ita firmiter esse infixam, vt inde dimoueri prorsus nequeat, cuius ergo rigor vbique sit $= Ekk$, longitudo autem eius vocetur $AB = a$. Iam huic columnae in summitate A applicetur vis horizontalis AV, quae aequiualeat pondere $= F$, a qua igitur ipsa columna incuruabitur in situm $Bya$, hancque curuaturam tanquam minimam spectemus, scilicet vis illa horizontalis F maior capi non debet, quam vt punctum supremum A per spatiolum $Aa = \alpha$ detorqueat. Quibus positis ostendam, quomodo formula nostra rigorem exprimens, scilicet $Ekk$, ex vi sollicitante F et altitudine $AB = a$ cum spatiolo $Aa = \alpha$ determinari possit.

Tab. II. Fig. 5.

§. 9. Hunc in finem ante omnia in naturam curvae $Bya$ inquiri oportet. Ducta igitur ex quouis curuae puncto $y$ ad verticalem AB, normali $yx$, vocetur abscissa $Bx = x$ et applicata $xy = y$, quae ergo per hypothesin

 est

est quam minima, ita vt longitudo curuae B $y$, quae sit $= s$, ab ipsa abscissa B $x = x$ non discrepet. Quare si radius osculi huius curuae in $y$ fuerit $y\,r$, eius longitudo, vti constat, est $= \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, ideoque ob $ds = dx$ iste radius osculi erit $= \frac{dx^2}{ddy}$, ex quo rigor per hunc radium osculi diuisus erit $\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$, quae formula aequalis statui debet momento vis sollicitantis F hanc curuaturam producentis, quod momentum cum sit F. A $x$ = F $(a - x)$, habebitur pro nostra curua haec aequatio: $\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} = F(a-x)$, ex qua ante omnia naturam curuae definire oportet.

§. 10. Multiplicemus hanc aequationem per $dx$ atque integratio nobis dabit:

$$\frac{Ekk\,dy}{dx} = \tfrac{1}{2} F(2ax - xx) + C$$

quae constans C ita debet esse comparata, vt posito $x = o$, hoc est in ipso puncto B, non solum fiat $y = o$, sed etiam $\frac{dy}{dx} = o$, propterea quod recta A B in B firmiter est infixa, vnde patet sumi debere C $= o$, ita vt hanc habeamus aequationem: $Ekk\,dy = \tfrac{1}{2} F\,dx(2ax - xx)$, quae denuo integrata praebet $Ekky = \tfrac{1}{6} F(3axx - x^3)$, vnde posito $x = o$ iam fit $y = o$. Transferamus nunc punctum $y$ in ipsam extremitatem $a$, sumendo $x = a$, et quoniam nouimus, tum fieri applicatam $=$ A $a = \alpha$, aequatio nostra dabit $Ekk\alpha = \tfrac{1}{3} F a^3$, ex quo manifesto prodit formula rigorem exprimens $Ekk = \frac{F a^3}{3\alpha}$, sicque per vnicum experimentum pro quauis columna cylindrica eius rigor absolutus seu valor formulae $Ekk$ expedite determinari poterit, cum ex elementis cognitis, scilicet F, $a$ et $\alpha$ statui possit $E = F$ et $kk = \frac{a^3}{3\alpha}$.

§. 11. Postquam igitur exploratus fuerit valor formulae $Ekk$ pro quapiam proposita columna cylindrica, ponamus istam columnam, cuius axem tantum A B in figura exhibemus, a pondere incumbente O infinite parum esse inflexam, ita vt curuam $A y B$ induerit, ambaeque extremitates A et B immotae manserint; quoniam enim incuruatio supponitur infinite parua, ipsa curua $A y B$ ab axe A B prorsus non discrepabit. His igitur positis vocemus altitudinem huius columnae $AB = a$, et pro puncto eius quocunque $y$ ponamus abscissam $Ax = x$ et applicatam $xy = y$, ita vt $y$ euanescere debeat tam pro $x = 0$ quam pro $x = a$: modo ante autem vidimus radium osculi in hoc puncto $y$ esse $= \frac{dx^2}{ddy}$, qui cum hic axem versus vergat, poni debet $yr = -\frac{dx^2}{ddy}$, ita vt momentum inflexioni resistens sit $-\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$.

Tab. II. Fig. 6.

§. 12. Quoniam nunc onus columnae incumbens O secundum directionem verticalem A B deorsum vrget, eius momentum respectu puncti $y$ erit $= Oy$, vnde statim deducitur haec aequatio: $-\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} = Oy$, pro qua breuitatis gratia scribamus $\frac{Ekk}{O} = cc$, vt habeamus hanc aequationem: $\frac{cc\,ddy}{dx^2} + y = 0$, quae ducta in $2dy$ et integrata dat $\frac{cc\,dy^2}{dx^2} + yy = ff$, vnde elicimus

$$dx^2 = \frac{cc\,dy^2}{ff - yy}, \text{ ideoque } dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{(ff - yy)}}.$$

Hinc denuo integrando peruenimus ad hanc aequationem: $x = c$ Arc. sin. $\frac{y}{f} + C$, ita vt duae constantes $f$ et $c$ in calculum sint ingressae, quas ita definiri oportet, vt $y$ euanescat tam casu $x = 0$ quam casu $x = a$; prior autem conditio statim nobis dat $C = 0$, ita vt habeamus

$x = c$

$x = c$ Arc. ſin. $\frac{y}{f}$. Fiat nunc $x = a$, et quia fieri debet $y = 0$, habebimus $a = c$ Ar. ſin. o. Tales autem arcus ſunt $0, \pi, 2\pi$, $3\pi$ etc. quorum primus iam pro termino A valuit; hic igitur valebit valor $\pi$, ita vt ſit $a = \pi c$. Poſueramus vero $cc = \frac{Ekk}{O}$, quamobrem habebimus $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$.

§. 13. Hic notatu dignum eſt, alteram conſtantem $ff$ prorſus ex calculo eſſe egreſſam. Quoniam igitur inuenimus $x = c$ A. ſin. $\frac{y}{f}$, erit inuertendo $y = f$ ſin. $\frac{x}{c}$; vnde patet, quo maior fuerit quantitas $f$, eo magis incuruationem augeri; ideoque aequationem noſtram finalem $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$ perinde ſubſiſtere, ſiue columnae curuatura inducta fuerit tantillo maior ſiue minor, dummodo fuerit quam minima. Nunc vero ex ipſa hac aequatione innoteſcet pondus O, quod talem incuruationem producere valeat: reperietur enim $O = \frac{\pi\pi Ekk}{aa}$; vnde intelligitur, quamdiu onus, columnae incumbens, non maius fuerit quam $\frac{\pi\pi Ekk}{aa}$, columnam omnino firmam conſiſtere, neque vllum eſſe periculum, vt oneri ſuccumbat. Hinc igitur ſtatim patet, quod iam dudum inueneram, onera, quae columnae cylindricae eiusdem craſſitiei ſuſtinere valent, tenere rationem reciprocam duplicatam altitudinum $a$, ita vt columna duplo altior tantum quartam partem oneris geſtare valeat.

§. 14. Vt nunc etiam columnas diuerſae craſſitiei inter ſe comparare queamus, inueſtigari oportet, quomodo quouis caſu formula rigorem exprimens $Ekk$ a craſſitie pendeat, id quod ex principiis phyſicis et experimentis ſuper cohaeſione et firmitate corporum inſtitutis deriuari debet, vbi imprimis ad ipſam materiam, ex qua columnae paran-

parantur, erit respiciendum; et quoniam corpora incuruari nequeunt, nisi quaedam elementa a se inuicem longius remoueantur, eiusmodi experimenta consulere debebimus, quibus talis diductio vel elongatio a viribus quibuscunque produci potest. Hanc igitur inuestigationem sequenti modo adgrediamur.

Tab. II. Fig. 7.

§. 15. Ex eadem materia, qua columnae constant, paretur bacillus cylindricus, vel prismaticus EEFF, qui altero termino EE pauimento MN ita firmiter infigatur, vt aliter inde diuelli nequeat, nisi dirumpatur, in altero vero termino pondus P appendi concipiatur, quod eo vsque augeri potest, vt iste bacillus dirumpatur. Ante autem quam ipsa ruptura euenit, bacillus aliquantillum elongabitur per spatiolum $Ff$, quod eo minus erit, quo firmior et solidior fuerit massa bacilli. Concipiamus ergo tale experimentum institui cum bacillo, cuius longitudo $EF = f$ et crassities $= gg$, tum vero istum bacillum ab appenso pondere P elongari per spatiolum $Ff = \Phi$; ac primo quidem patet, istam elongationem $\Phi$ ipsi longitudini bacilli $f$ esse proportionalem: si enim bacillus duplo esset longior, ab eodem pondere P duplo maior elongatio $\Phi$ produceretur; vnde si statuamus $\Phi = \delta f$, dabitur certa relatio inter pondus P et litteram $\delta$, ita vt non amplius opus sit ipsam longitudinem $f$ in computum ducere.

§. 16. Euidens autem est, quo maius fuerit pondus P, eo maiorem quoque esse debere litteram $\delta$, hanc autem non vltra certum terminum augeri posse, quin bacillus penitus dirumpatur. Quamdiu autem istae elongationes sunt satis paruae, dubitari nequit, quin valor litterae $\delta$

ipſi ponderi P ſit proportionalis, quandoquidem in omnibus huiusmodi mutationibus minimis effectus cauſſae ſemper eſt proportionalis. Deinde etiam euidens eſt, ſi bacillus eſſet duplo craſſior, tum ad eandem elongationem producendam requiri pondus duplo maius; ex quo intelligitur, pondus P tenere rationem compoſitam ex littera $\delta$ et craſſitie, quam poſuimus $= gg$, ita vt ipſum pondus P ſemper proportionale ſit formulae $\delta gg$.

§. 17. Quo nunc etiam craſſitiem $gg$ ex calculo expellamus, loco ponderis P commode ſubſtitui poterit pondus voluminis ex eadem materia conſtantis, quod ergo per ſimilem bacillum, cuius longitudo ſit $= p$, repraeſentari poterit, ita vt ſit $P = pgg$, hoc eſt vt P aequetur ponderi cylindri ex ipſa materia columnae confecti, cuius baſis ſit $= gg$ et altitudo $= p$. Quo conſtituto, cum iſtud pondus $pgg$ ſemper ſit proportionale formulae $\delta gg$, eandem proportionem tenebit $p$ ad $\delta$; vnde ſi ſtatuatur $p = \delta b$, erit $b$ certa quaedam longitudo, quae pro omnibus bacillis ex eadem materia confectis erit eadem, quandoquidem neque a longitudine $f$ neque a craſſitie $gg$ pendet; ex quo hanc longitudinem $b$ tanquam veram menſuram tenacitatis ſeu firmitatis materiae ſpectare poterimus, de qua quouis caſu agitur, ita vt cuique materiae determinata quaedam longitudo $b$ conueniat. Hac igitur ſemel cognita, ſi fuerit $\frac{\Phi}{f} = \delta$, ſemper erit $p = \delta b$, eritque $p$ longitudo ſimilis bacilli craſſitiei $gg$, cuius pondus aequetur ponderi appenſo P.

§. 18. Hinc igitur vbicunque materia, ex qua columna eſt confecta, de ſtatu ſuo naturali diducitur, ex ipſa di-

diductione determinari poterit vis ad eam producendam requisita. Consideremus igitur elementum columnae quodcunque $EeFf$, cui ob incuruationem inducta sit figura elementi annularis $EeFf$ ex centro R descripti, cuius radius sit $ER = r$, ipsum vero elementum curuae $Ee = ds$, vbi quidem solam crassitiem EF in figura exhibere licuit, latitudinem autem in singulis punctis $x$ mente suppleri conuenit. Iam intra columnam consideremus punctum quodcunque X, per quod centro R describatur arculus $Xx$, ac posito interuallo $EX = x$ erit iste arculus

Tab. II. Fig. 8.

$$Xx = \frac{(r+x)ds}{r} = ds + \frac{xds}{r}$$

cuius longitudo cum in statu naturali fuerit $= Ee = ds$, nunc spatium elongationis, quod supra vocauimus $\Phi$, erit $= \frac{xds}{r}$: hic vero pro longitudine $f$ habemus $Ee = ds$. Hinc ergo cum fuerit $\delta = \frac{\Phi}{f}$, hoc casu erit $\delta = \frac{x}{r}$, quae fractio ducta in longitudinem illam constantem $b$, si per totam columnae crassitiem extendatur, dabit pondus, quod ista incuruatio postulat.

§. 19. Promoueamus punctum X more solito per elementum $dx$, sitque latitudo columnae in $X = y$, atque elementum voluminis basi $ydx$ insistens in statu naturali erit $ydxds$, quod cum elongationem littera $\delta = \frac{x}{r}$ indicatam sit passum, vis ad hoc requisita aequabitur ponderi voluminis $= \frac{bxydx}{r}$, cuius ergo integrale, per totam amplitudinem sectionis sumtum, dabit totam vim ad incuruationem elementi $FfEe$ requisitam.

§. 20. Pro nostro autem instituto non tam ipsam hanc vim quam eius momentum respectu puncti E, a quo

 in-

incuruatio incipit, exigimus; quam ob rem illa formula $\frac{bxydx}{r}$ insuper in distantiam EX $= x$ duci debet, prodibitque elementum huius momenti $= \frac{bxxydx}{r}$, cuius integrale per totam crassitiem sumtum, quod est $\frac{b}{r}\int xxy\,dx$, ipsum dabit momentum virium ad hanc curuationem producendam requisitum. Quoniam igitur ante idem momentum ex formula rigoris absoluti E$kk$ ita expressimus, vt esset $\frac{Ekk}{r}$: nunc manifestum est, qualis valor formulae E$kk$ pro quouis casu tribui debeat; semper enim erit $Ekk = b\int xxy\,dx$, si modo hoc integrale rite capiatur, ac per amplitudinem columnae circa sectionem EF extendatur.

§. 21. Pendet igitur ista determinatio a figura istius sectionis columnae per EF factae, siue a relatione, quam latitudo $y$ pro quauis abscissa $x$ tenet. Ponamus primo latitudinem vbique esse eandem, scilicet $y = c$, crassitiem vero EF $= b$, atque formula integranda erit

$$\frac{cb}{r}\int xx\,dx = \frac{1}{3}\frac{cbx^3}{r}$$

quae formula vsque ad terminum F extensa, posito $x = b$, dabit momentum ad incuruationem requisitum $= \frac{b^3}{3}\frac{cb}{r}$ qui hoc casu est valor formulae superioris $\frac{Ekk}{r}$, ita vt sit $Ekk = \frac{1}{3}b^3cb$. Hinc si aliam columnam consideremus, cuius crassities sit EF $=$ B, latitudo vero $=$ C, valores formulae E$kk$ inter se erunt vt $b^3c : B^3C$; vnde iam intelligitur, si sectiones columnae fuerint inter se similes, quod fit, si fuerit $B : C = b : c$, tum valores formulae E$kk$ fore in ratione $b^4 : B^4$, quod de omnibus sectionibus similibus valet. Vnde si sectiones fuerint circuli, vt supra assumsimus, valores formulae E$kk$ tenebunt rationem biquadraticam diametrorum.

§. 22.

§. 22. Parum quidem refert, pro aliis figuris valores absolutos formulae $E\,k\,k$ euoluere; interim tamen speciminis loco computemus casum, quo sectio $E\,F\,f\,e$ est circulus, diametro $E\,F = b$ descriptus. Hinc ergo pro abscissa $E\,X = x$ tota latitudo erit $y = 2\sqrt{b\,x - x\,x}$, ita vt sit $E\,k\,k = 2\,b\int x\,x\,d\,x\sqrt{b\,x - x\,x}$, si quidem hoc integrale ab $x = 0$ vsque ad $x = b$ extendatur. Pro illo inueniendo ponamus $x = b$ sin. $\Phi^2$, erit $b - x = b$ cos. $\Phi^2$, hincque $\sqrt{b\,x - x\,x} = b$ sin. $\Phi$ cos. $\Phi = \frac{1}{2}b$ sin. $2\,\Phi$; tum vero erit $d\,x = 2\,b\,d\,\Phi$ sin. $\Phi$ cos. $\Phi = b\,d\,\Phi$ sin. $2\,\Phi$, quibus substitutis fiet $E\,k\,k = b^4\;b\int d\,\Phi$ sin. $\Phi^4$ sin. $2\,\Phi^2$, quod integrale extendi debet a $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = 90°$.

§. 33. Nunc per notam angulorum Analysin primo est sin. $\Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $2\,\Phi$, hincque

$$\text{sin. }\Phi^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\text{ cos. }2\,\Phi + \tfrac{1}{8}\text{ cos. }4\,\Phi,$$

porro vero sin. $2\,\Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $4\,\Phi$, vnde conficitur

$$\text{sin. }\Phi^4\text{ sin. }2\,\Phi^2 = \tfrac{5}{32} - \tfrac{1}{8}\text{ cos. }2\Phi - \tfrac{1}{8}\text{ cos. }4\,\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{8}\text{ cos. }6\,\Phi - \tfrac{1}{32}\text{ cos. }8\,\Phi,$$

quae formula ducta in $d\,\Phi$ et integrata dat

$$\int d\,\Phi\text{ sin. }\Phi^4\text{ sin. }2\,\Phi^2 = \tfrac{5}{32}\,\Phi - \tfrac{1}{16}\text{ sin. }2\,\Phi - \tfrac{1}{32}\text{ sin. }4\,\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{48}\text{ sin. }6\,\Phi - \tfrac{1}{256}\text{ sin. }8\,\Phi,$$

quae expressio iam euanescit facto $\Phi = 0$. Sumatur igitur $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$, ac totum hoc integrale euadet $= \frac{5\pi}{64}$; ita vt sit $E\,k\,k = \frac{5\,\pi\,b^4\,b}{64}$, quae formula ergo vtique biquadrato diametri est proportionalis.

§. 24. Regrediamur nunc ad columnam cylindricam supra tractatam, cuius altitudo erat $A\,C = a$ (Fig. I.)

 eius

eius vero diametrum nunc ponamus $= b$, et quoniam modo inuenimus $E k k = \frac{5 \pi b^4 b}{64}$, erit onus quod ista columna sustinere valebit ante quam incuruetur $O = \frac{5 \pi^3 b^4 b}{64 aa}$, cuius quantitas aequatur ponderi voluminis ex eadem materia confecti, cuius soliditas est haec ipsa quantitas $\frac{5 \pi^3 b^4 b}{64 aa}$, siue aequabitur ponderi paris cylindri, cuius diameter $= b$, altitudo vero $= \frac{5 \pi^3 bbb}{64 aa}$. Vnde si plures habeantur huiusmodi columnae cylindricae ex eadem materia confectae, onera, quae gestare valent, tenebunt rationem compositam ex directa quadruplicata diametrorum et reciproca duplicata altitudinum; sin autem ex diuersa materia fuerint factae, quoniam cuilibet materiae certa longitudo $b$ conuenit, onera insuper erunt in ratione harum ipsarum altitudinum $b$.

§. 25. In solutione autem supra data assumsimus columnam a solo pondere incumbente O comprimi, ipsum autem columnae pondus neglexinus; plerumque autem onus sustentatum tantopere superat pondus proprium columnae, vt error hinc oriundus tuto negligi queat. Interim tamen deinceps operam dabimus, vt etiam rationem proprii ponderis in solutione habeamus, quod in prima solutione, quam olim in loco initio allegato dederam, expedire non sum ausus, ob summas difficultates, quae in hac euolutione occurrebant. Facile autem intelligitur, tali columnae tantam altitudinem tribui posse, vt ne proprium quidem pondus sustentare valeat, etiamsi fuerit $O = 0$, qui ergo Casus vtique peculiarem solutionem postulat.

§. 26.

§. 26. His expositis consideremus aliquot experimenta, quae celeberrimus *Muschenbroekius* de vi columnarum instituit; non autem cylindros adhibuit, sed prismata quadrata, vnde valorem formulae $E k k$ pro sectionibus quadratis explorare oportet. Supra autem iam pro casu $y = c$ inuenimus $E k k = \frac{1}{3} b^{3} c h$ (§. 21.), hinc pro experimentis modo memoratis erit $E k k = \frac{1}{3} b^{4} h$, vbi $b$ denotat latus sectionis quadratae. Quamobrem si altitudo talis columnae prismaticae fuerit $= a$, onus, quod gestare valebit erit $O = \frac{\pi \pi b^{4} h}{3 a a}$. Secundum hanc igitur formulam experimenta illa examinemus.

§. 27. Parauit autem primo *Muschenbroekius* ex abiete trabeculam, 4 pedes longam, prismaticam, cuius basis erat quadratum, cuius latus $= \frac{51}{100}$ digit. eaque in situ verticali constituta dirupta fuit ab imposito pondere 64 libr. 9. unc. Deinde alia trabecula ex eodem ligno confecta pariter quatuor pedes longa sed cuius baseos quadratae latus erat $\frac{70}{100}$ dig., dirupta fuit a pondere 226 libr. Hic ergo erat altitudo, quam vocauimus $a$, $= 4$ ped. et in posteriore experimento latus quadrati $b = 0, 70$ digitis onus vero impositum $O = 226$ lib. Hinc ergo si ex eodem ligno paretur columna prismatica altitudinis $= A$ pedum, cuius baseos latus $= B$ digitor, ista columna sustinere poterit onus, cuius pondus $= \frac{226. B^{4} 4^{2}}{(0,70)^{4} A^{2}}$ libr. ideoque hoc onus erit $15060 \frac{B^{4}}{A^{2}}$ libr. Vnde si altitudo A esset $= 20$ ped. et crassities $B = 20$ dig. talis columna sustentare posset onus $= 6024000$ libr.

§. 28.

§. 28. Ex hoc experimento etiam ipſam longitudinem $b$ pro iſta ſpecie ligni definire licebit ope aequationis $b = \frac{2aaO}{\pi\pi b^4}$, ſi modo loco O ſubſtituatur maſſa ex eodem ligno conſtans, cuius pondus valeat 226 libr. Cum nunc pedis cubici aquae pondus ſit circiter 70 libr. grauitas autem ſpecifica huius ligni ſit duplo minor quam grauitas ſpecifica aquae, vnus pes cubicus talis ligni pondus habebit 35 libr. quare fiat 35 libr. : 1 = 226 libr. : O, ſicque erit $O = \frac{226}{35}$, ideoque in pedibus cubicis erit $O = 6,457$. Reliquas igitur quantitates etiam in pedibus exprimamus, eritque $a = 4$ et $b = 0,058$; vnde ex ſequente calculo ipſa longitudo $b$ eruetur

| | |
|---|---|
| $l.\ 2aa = 1,6812412$ | $l.\ \pi\pi = 0,9942996$ |
| $l.\ O = 0,8100308$ | $l.\ b^4 = 5,0537120$ |
| $l.$ Num. $= 2,4912720$ | $l.$ Denom. $= 6,0480116$ |
| ſub. $l.$ Denom. $= 6,0480116$ | |
| $l.\ b = 6,4432604$ | ergo $b = 2774980$ |

conſequenter pro hac ſpecie ligni longitudo $b$, qua tenacitatem metimur, valet 2774980 ped. vnde, quantum trabecula ex tali ligno parata a quauis vi elongari poſſit, definire poterimus. Ita ſi ipſam trabeculam ab auctore vſurpatam conſideremus, cuius longitudo $a = 4$ ped. et baſeos quadratae latus $= \frac{7}{18}$ digit. eamque a pondere 226 libr. non comprimi ſed diſtendi concipiamus, ſecundum praecepta ſupra data hoc pondus 226 libr. per talem trabeculam exprimamus, tam longam, vt eius pondus ſit 226 libr. ſitque haec longitudo $= p$. et quoniam vidimus pondus 226 libr. conuenire maſſae ligneae, cuius volumen $= 6,457$ ped.

ped. cubicor. eritque $b\,b\,p = 6{,}457$ ped. cubicor. Cum igitur in pedibus sit $b = 0{,}058$, reperietur $p = 1919$. Quodsi iam elongatio istius trabeculae, a tanta tensione orta, vocetur vt supra $= \delta\, a$, erit $p = \delta\, b$, ideoque $\delta = \frac{p}{b}$ $= 0{,}00069$, ideoque ipsa elongatio $\delta\, a = 0{,}00276$ ped. in digitis vero erit $\delta\, a = 0{,}033312$, siue propemodum $\frac{1}{30}$ digit. id quod ab experientia non abhorrere videtur.

§. 29. In hoc ligno auctor iam obseruauit, vim, qua columna dirumpitur, satis exacte esse proportionalem biquadrato crassitiei $b^4$; in aliis autem lignis, praecipue in quercu, animaduertit, vim rumpentem in minore ratione quam quadruplicata augeri, cuius phoenomeni ratio sine dubio in indole fibrarum, ex quibus hoc lignum constat, est quaerenda; scilicet, quia assumsimus, elongationem duplo maiorem etiam vim duplo maiorem postulare, concludere debemus, in ligno quercino plures fibrillas rumpi, antequam elongatio fiat duplo maior, vnde etiam renitentia tanto erit minor. Hinc intelligitur, formulae nostrae inuentae, quatenus biquadratum crassitiei $b^4$ continet, in praxi non nimium tribui posse, et pro varia materiae, ex qua columnae conficiuntur, natura quandam correctionem admitti debere, ex pluribus experimentis determinandam.

§. 30. Quae hactenus de Columnis cylindricis in medium attulimus, haud difficulter ad eiusmodi Columnas transferuntur, quarum crassities certa quadam lege ascendendo decrescit, quod argumentum hic de nouo tractare superfluum foret, propterea quod iam fusius id exposui in dissertatione mea initio allegata. Verum quia tum temporis non videbam, quomodo ipsum quoque pondus colum-

 nae

nae in computum duci queat, istum defectum hic supplere conabor; vbi imprimis sum inuestigaturus, ad quantam altitudinem columna cylindrica extendi possit, ne sub proprio pondere succumbat, etiamsi superne nullum onus sustentet.

Tab. II. Fig. 9

§. 31. Referat igitur vt supra curua $AqyB$ axem columnae, qui a proprio pondere iam ad hanc figuram sit reductus, ac ponatur altitudo, quam quaerimus, $AB = a$, et abscissae cuicunque $Ax = x$ respondeat applicata $xy = y$, quae prae abscissa pro infinite parua haberi queat, ita vt in puncto $y$ radius osculi sit $r = -\frac{dx^2}{ddy}$; tum vero denotet $Ekk$, vt supra, formulam rigoris, ita vt incuruatio in puncto $y$ postulet virium momentum $= \frac{Ekk}{r} = -\frac{Ekkddy}{dx^2}$.

§. 32. Quoniam igitur ista incuruatio a solo pondere portionis superioris columnae $Aqy$ producitur, consideremus eius elementum quodcunque in $q$, quod respondeat abscissae $Ap = p$ et applicatae $pq = q$, sitque $bb$ crassities columnae per totam eius longitudinem; et cum elementum arcus $Aq$ ipsi elemento abscissae $dp$ aequale spectari possit, eius pondus exprimi poterit formula $bbdp$, quod agit in directione verticali $qs$; quam ob causam etiam in formula rigoris $Ekk$ pondus $E$ per massam eiusdem materiae, ex qua columna constat, exhiberi oportebit. Nunc igitur consideremus punctum $y$ tanquam fixum, ad quod vsque puncta $q$ ab $A$ promoueantur, et momentum vis elementaris $bbdp$, in directione $qs$ agentis, respectu puncti $y$ erit $= bbdp(y-q)$, cuius integrale, ob $y$ constans, erit $= bbpy - bb\int qdp$, quo momentum ex pondere

dere arcus $A q$ ortum, exprimitur. Nunc igitur punctum $q$ vsque in $y$ promoueatur, fietque $p = x$ et $q = y$; vnde totum momentum, incuruationem in $y$ producens, erit $bbxy - bb\int y\,dx = bb\int x\,dy$, cui ergo aequalis esse debet formula $-\frac{Ekkddy}{dx^2}$, ita vt habeatur ista aequatio:

$$\frac{Ekkddy}{dx^2} + bb\int x\,dy = 0.$$

§. 33. Haec autem aequatio ita est comparata, vt nullo modo ad integrabilitatem perduci queat, quae etiam est ratio, cur olim hunc casum euoluere non sim ausus; verum deinceps perspexi, integratione actuali non esse opus, dummodo integrale completum per seriem infinitam euolui queat. Quod quo facilius fieri possit, statuamus breuitatis gratia $Ekk = mbb$, vt haec aequatio habeatur: $\frac{mddy}{dx^2} + \int x\,dy = 0$, et quia abscissae $x = 0$ etiam applicata $y$ euanescit, statuamus, saltem pro initio seriei quaesitae, $y = \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 + \delta x^4$, eritque

$$dy = \alpha dx + 2\beta x dx + 3\gamma xx dx + 4\delta x^3 dx,$$

hineque

$$\int x\,dy = \tfrac{1}{2}\alpha xx + \tfrac{2}{3}\beta x^3 + \tfrac{3}{4}\gamma x^4 + \tfrac{4}{5}\delta x^5,$$

tum vero erit

$$\frac{mddy}{dx^2} = 2m\beta + 6m\gamma x + 12m\delta xx,$$

quae expressio, praecedenti iuncta, nihilo debet esse aequalis; vnde fit $\beta = 0$; $\gamma = 0$ et $\delta = \frac{1}{24}\alpha m$; vnde intelligimus, seriem quaesitam a termino $\alpha x$ incipere, tum vero, ob $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, sequentes potestates per $x^3$ increscere.

§. 34. Hoc obseruato fingamus pro $y$ sequentem seriem:

$$y = Ax + Bx^4 + Cx^7 + Dx^{10} + Ex^{13} + Fx^{16} + Gx^{19} + \text{etc.}$$

eritque

$$\int x\,dy = \tfrac{1}{2}Axx + \tfrac{4}{5}Bx^5 + \tfrac{7}{8}Cx^8 + \tfrac{10}{11}Dx^{11} + \tfrac{13}{14}Ex^{14} + \tfrac{16}{17}Fx^{17} + \text{etc.}$$

ad quam feriem addere debemus iftam:

$$\frac{m\,ddy}{dx^2} = 3.4\,mBxx + 6.7\,mCx^5 + 9.10\,mDx^8 \quad 12.13\,mEx^{11} + \text{etc.}$$

quarum ferierum fumma, quia debet euanefcere, dabit fequentes determinationes:

1°. $\tfrac{1}{2}A + 3.4\,mB = 0$, hinque $B = -\frac{A}{2.3.4\,m}$.

2°. $\tfrac{4}{5}B + 6.7.\,mC = 0$, hinc $C = -\frac{4B}{5.6.7\,m} = \frac{1.4.A}{2.3.4..7\,m^2}$.

3°. $\tfrac{7}{8}C + 9.10\,mD = 0$, hinc $D = -\frac{7.C}{8.9.10\,m} = -\frac{1.4.7\,A}{2.3.4...10\,m^3}$.

4°. $\tfrac{10}{11}D + 12.13\,mE = 0$, hinc $E = -\frac{10\,D}{11.12.13\,m} = \frac{1.4.7.10\,A}{2.3.....13\,m^4}$.

§. 35. His valoribus inuentis applicata $y$ per fequentem feriem infinitam exprimetur:

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1.x^4}{2.3.4\,m} + \frac{1.4x^7}{2.3...7\,m^2} - \frac{1.4.7\,x^{10}}{2.3....10\,m^3} + \frac{1.4.7.10\,x^{13}}{2.3...13\,m^4} \text{ etc.}$$

quae expreffio rite ad cafum noftrum eft accommodata: continet enim adhuc vnam conftantem arbitrariam A; altera vero iam inde eft determinata, quod facto $x = 0$ etiam fieri debeat $y = 0$. Transferamus nunc punctum $y$ in terminum imum B, ponendo $x = a$, et quia hic applicata $y$ euanefcere debet, prodibit ifta aequatio infinita:

$$0 = 1 - \frac{1.a^3}{2.3.4\,m} + \frac{1.4\,a^6}{2.3..7\,m^2} - \frac{1.4.7\,a^9}{2.3...10\,m^3} + \frac{1.4.7.10\,a^{12}}{2.3...13\,m^4} \text{ etc.}$$

ex qua ipfam altitudinem columnae $AB = a$ eruere oportet: fic enim inueniemus eam noftrae columnae altitudinem, in qua iam a proprio fuo pondere incuruari incipiet:

cipiet. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia $\frac{a^3}{m} = v$, vt resoluenda proponatur haec aequatio:

$$0 = 1 - \frac{1 \cdot v}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4\, vv}{2 \cdot 3 \ldots 7} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7\, v^3}{2 \cdot 3 \ldots 10} \text{ etc.}$$

sicque totum negotium huc est reductum, vt inueniatur valor litterae $v$, qui hanc seriem infinitam nihilo reddat aequalem; hoc enim valore inuento altitudo columnae quaesita erit $a = \sqrt[3]{m v}$.

§. 36. Euidens est hanc seriem vehementer conuergere, quantumuis etiam magnus numerus pro $v$ accipiatur. Primo autem hic obseruamus, quamdiu fuerit $v < 24$, quoniam termini iam ab initio continuo decrescunt, seriei summam necessario esse positiuam; vnde patet, numerum $v$ necessario maiorem esse debere quam 24. Quo autem resolutionem huius aequationis faciliorem reddamus, ponamus $v = 6u$, vt sit $a = \sqrt[3]{6 m u}$, et aequationem hinc natam hoc modo repraesentemus:

$$0 = 1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4 - \varepsilon u^5 \text{ etc.}$$

eritque

$$\alpha = \tfrac{1}{4};\ \beta = \tfrac{4}{35}\alpha;\ \gamma = \tfrac{7}{120}\beta;\ \delta = \tfrac{10}{286}\gamma;\ \varepsilon = \tfrac{13}{560}\delta;$$

$$\zeta = \tfrac{16}{969}\varepsilon;\ \eta = \tfrac{19}{1540}\zeta;\ \theta = \tfrac{22}{2300}\eta;\ \iota = \tfrac{25}{3276}\theta;\ \varkappa = \tfrac{28}{4495}\iota;$$

$$\lambda = \tfrac{31}{5984}\varkappa;\ \mu = \tfrac{34}{7770}\lambda \text{ etc.}$$

Hinc in subsidium sequentium calculorum colligamus harum literarum logarithmos, eosque cum suis differentiis primis et secundis ordine referamus hoc modo:

 Logi-

| Logarithmi literarum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. | Differentiae primae. | Differentiae secundae. |
|---|---|---|
| $l\alpha = 9,3979400$ | 0,9420080 | 0,2920752 |
| $l\beta = 8,4559320$ | 1,2340832 | 0,2222828 |
| $l\gamma = 7,2218488$ | 1,4563660 | 0,1778786 |
| $l\delta = 5,7654828$ | 1,6342446 | 0,1479592 |
| $l\varepsilon = 4,1312382$ | 1,7822038 | 0,1265633 |
| $l\zeta = 2,3490344$ | 1,9087671 | 0,1105380 |
| $l\eta = 0,4402673$ | 2,0193051 | 0,0980988 |
| $l\theta = 8,4209622$ | 2,1174039 | 0,0881678 |
| $l\iota = 6,3035583$ | 2,2055717 | 0,0800582 |
| $l\kappa = 4,0979866$ | 2,2856299 | 0,0733122 |
| $l\lambda = 1,8123567$ | 2,3589421 | |
| $l\mu = 9,4534146$ | | |

§. 37. His praeparatis ad radicem aequationis propositae $0 = 1 - \alpha u + \beta uu - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. inueniendam vtamur methodo per feries recurrentes procedente, quae iubet talem feriem formare ex fcala relationis $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, \varepsilon, -\zeta$ etc. quae fit 1, A, B, C, D, E, F etc. ita vt fit $A = \alpha$; $B = \alpha A - \beta$; $C = \alpha B - \beta A + \gamma$; $D = \alpha C - \beta B + \gamma A - \delta$; $E = \alpha D - \beta C + \gamma B - \delta A + \varepsilon$ etc. tum vero fequentes fractiones continuo propius ad radicem ipfius $u$ appropinquabunt: $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; $\frac{C}{D}$; $\frac{D}{E}$ etc. Calculo igitur inftituto termini huius feriei recurrentis fequenti modo determinabuntur:

$$A = 0,25$$
$$B = 0,033929$$
$$C = 0,00300610$$
$$D = 0,0001448750$$
$$E = -0,000006336562$$

Quo-

Quoniam hic litera E valorem sortita est negatiuum, hinc iam tuto concludere possumus, aequationem nostram propositam nullam plane habere radicem realem, quod etiam inde patet, quod fractiones supra allatae $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; etc. ad nullum certum terminum conuergunt: fit enim

$$\frac{1}{A} = 4; \; \frac{A}{B} = 7; \; \frac{B}{C} = 11; \; \frac{C}{D} = 20; \; \frac{D}{E} = -23.$$

§. 38. Aequatio igitur infinita $0 = 1 - \alpha u + \beta u^2$ etc. ita est comparata, vt nullam plane radicem realem inuoluat, ideoque nullus datur numerus, quantumuis magnus accipiatur, pro $u$, qui summam huius seriei reddat nihilo aequalem, sed quicunque numerus pro $u$ accipiatur, summa seriei $1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. semper erit positiua, quam adeo quouis casu assignare licebit. Ponamus enim verbi gratia $u = 10$, et singulos terminos istius seriei euoluamus; vbi quidem termini ab initio vehementer diuergent, mox autem ita conuergent, vt sequentium omnium summa haud difficulter assignari queat. Singuli autem huius seriei termini sequentes adipiscentur valores:

$$\begin{aligned}
+ 1 &= 1{,}0000000 \\
- \alpha u &= -2{,}5000000 \\
+ \beta u^2 &= 2{,}8571428 \\
- \gamma u^3 &= -1{,}6666666 \\
+ \delta u^4 &= 0{,}5827506 \\
- \varepsilon u^5 &= -0{,}1352814 \\
+ \zeta u^6 &= 0{,}0223375 \\
- \eta u^7 &= -0{,}0027603 \\
+ \theta u^8 &= 0{,}0002636 \\
- \iota u^9 &= -0{,}0000201 \\
+ \kappa u^{10} &= 0{,}0000012
\end{aligned}$$

Quodsi

Quodsi iam huius seriei ab initio duo, tres, quatuor, quinque termini coniungantur, prodibunt numeri alternatim maiores, vel minores quam vera summa, veluti hic repraesentatur.

| Termini | Summa |
|---|---|
| 1. | 1,0000000 |
| 2. | — 1.5000000 |
| 3. | 1,3571428 |
| 4. | — 0,3095238 |
| 5. | 0,2732275 |
| 6. | 0,1379461 |
| 7. | 0,1602836 |
| 8. | 0,1575233 |
| 9. | 0,1577869 |
| 10. | 0,1577668 |
| 11. | 0,1577680 |

Vnde patet, veram summam contineri intra hos limites: 0,1577668 et 0,1577680, ideoque medium sumendo vera summa aestimari potest = 0,1577674.

§. 39. His obseruatis sequens paradoxon maxime memorabile se nobis offert: quod columnae cylindricae, ad quamcunque altitudinem etiam porrigantur, nunquam sub proprio pondere succumbant, quod vtique eo magis est admirandum, quod aucta columnae altitudine onus sustentandum decrescat in ratione duplicata altitudinem, etiamsi proprium pondus columnae negligatur; ex quo concludi debere videbatur, si etiam proprii ponderis ratio habeatur, onus sustentandum adhuc magis diminui, atque

adeo

adeo tandem penitus euanefcere debere, ita vt columna nimis alta nullum plane onus geftare valeret, quod tamen nunc longe aliter fe habere inuenimus. Haec autem omnia accuratius examen requirunt, quod in fequente differtatione inftituemus.

---

---

# EXAMEN INSIGNIS PARADOXI IN THEORIA COLVMNARVM OCCVRRENTIS.

Auctore
*L. EVLERO.*

§. 1.

Non ſolum maxime paradoxa, verum etiam vehementer ſuſpecta videri debet concluſio, ad quam in ſuperiore diſſertatione, *de vi Columnarum* agentes, ſumus perducti: quod ſcilicet nulla columna cylindrica, quantumuis fuerit alta, vnquam a proprio pondere frangatur. Cum enim, aucta altitudine columnae, eius vis onera geſtandi ſecundum duplicatam rationem diminuatur, vtique tanta dabitur altitudo, qua columna ne leuiſſimum quidem ponduſculum ſuſtinere valeret; vnde maxime abſurdum videtur, quod talis columna, etiamſi in immenſum vlterius eius altitudo augeretur, tamen nunquam diffringi debeat. Hanc ob rem maxime neceſſarium videtur, omnes rationes, quibus iſta concluſio innititur, accuratius perpendere.

§. 2. Totum autem iudicium ſuper hac quaeſtione pendet a natura iſtius ſeriei infinitae:

$$1 - \frac{v}{4.1.} + \frac{v^2}{7.1.5} - \frac{v^3}{10.1.5.12} + \frac{v^4}{13.1.5.12.22} - \frac{v^5}{16.1.5.12.22.35} + \text{etc.}$$

vbi numeri 1, 5, 12, 22, 35, etc. ſeriem pentagonalium con-

constituunt, atque tota quaestio huc reducitur: vtrum summa huius seriei vnquam fieri possit nihilo aequalis, nec ne? Hic primo quidem statim patet, quamdiu numerus $v$ fuerit vnitate minor, summam huius seriei necessario semper esse positiuam, id quod etiam euenire deprehendi, etiamsi valor ipsius $v$ multo maior accipiatur. Neque vero ob summas calculi difficultates centenario maiores valores ipsius $v$ examini subiici possunt.

§. 3. Confugiendum ergo sum arbitratus ad methodum, radices aequationum per series recurrentes explorandi, quippe qua olim iam in simili quaestione, cum in motum oscillatorium catenae libere suspensae inquirerem, felici successu sum vsus; verum praesenti casu ista methodus penitus invtiliter est adhibita, vnde concludere non dubitaui, nullos prorsus pro $v$ dari valores reales, quibus illa series prorsus ad nihilum redigatur.

§. 4. Interim tamen certum est, istam methodum, radices aequationum per series recurrentes explorandi, maxime esse lubricam, et saepissime in errores inducere posse, cuius defectus vnicum exemplum attulisse iuuabit, circa hanc aequationem tantum cubicam: $1 - 2z + 4zz - 3z^3 = 0$, cuius vna radix manifesto est $z = 1$; at si ex scala relationis $2, -4, +3$ series recurrens formetur, ea prodit

$$1 + 2 + 0 - 5 - 4 + 12 + 25 - 10 - 84, \text{ etc.}$$

vnde radix cognita nullo modo concludi potest. Ratio autem huius defectus in radicibus imaginariis est quaerenda, et quoniam nostra aequatio sine vllo dubio plurimas, si non omnes, inuoluit radices imaginarias, mirum non est hanc operationem successu caruisse.

§. 5. Fateri igitur cogimur, hinc nihil tuto concludi posse, vtrum aequatio proposita radices habeat reales, nec ne, atque hic potius nostrum iudicium suspendere conueniet. Quamobrem ista ipsa aequatio:

$$0 = 1 - \frac{v}{4 . 1} + \frac{v^2}{7 . 1 . 5} - \frac{v^3}{10 . 1 . 5 . 12} + \frac{v^4}{13 . 1 . 5 . 12 . 22} - \text{etc.}$$

omnino digna videtur, vt Geometrae omni studio in eius naturam inquirant.

§. 6. Quoniam autem haec aequatio nata est ex consideratione illius lineae curuae, ad quam tales columnae, a sola grauitate sollicitatae, inflecti deberent ante quam rumperentur, necesse erit huius curuae symptomata accuratius examini subiicere. Referat igitur recta verticalis A B huiusmodi columnam, sitque A Y B ea linea curua, ad quam inflecti debet, antequam penitus corruat, atque inter eius coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ sequens inventa est aequatio infinita:

Tab. III. Fig. 1.

$$\frac{Y}{A} = x - \frac{1 . x^4}{2 . 3 . 4 . m} + \frac{1 . 4 x^7}{2 . 3 \ldots 7 . m^2} - \frac{1 . 4 . 7 x^{10}}{2 . 3 \ldots 10 . m^3} + \text{etc.}$$

Quoniam igitur in infimo columnae termino B applicata $y$ iterum euanescere debet, hic ante omnia inuestigari oportet abscissam illam $x$, cui respondeat applicata euanescens $y = 0$, quandoquidem haec ipsa abscissa aequabitur altitudini totius columnae A B; quamobrem si hoc, vti visum erat, nunquam euenire posset, sed, etiamsi abscissae $x$ in infinitum augeantur, applicatae tamen semper positiuum sortirentur valorem, id vtique certum foret signum, columnam etiam infinite altam sub proprio pondere nunquam succumbere debere, propterea quod alter columnae terminus B in infinitum remoueretur.

§. 7.

§. 7. Vt igitur accuratius in formam huius columnae inquiramus, ponamus br. gr. $x^3 = m\,t$, vt sit $x = \sqrt[3]{m\,t}$, et habebimus hanc aequationem:

$$\frac{z}{A\,x} = 1 - \frac{1.\,t}{2.\,3.\,4} + \frac{1.\,4\,t^2}{2.\,3.\,\ldots\,7} - \frac{1.\,4.\,7\,t^3}{2.\,3.\,\ldots\,10} + \frac{1.\,4.\,7.\,10\,t^4}{2.\,3.\,\ldots\,13} - \text{etc.}$$

quam feriem littera $s$ indicemus, ita vt fit $\frac{z}{A} = s\,x = s\sqrt[3]{m\,t}$. Ad hoc igitur examen inftituendum litterae $t$ fucceffiue tribuamus valores continuo maiores, et pro fingulis computemus valores refpondentes tam ipfius $s$ quam formulae $s\sqrt[3]{t}$, atque hos valores, prouti, inftituto calculo, fumus adepti, in fequenti tabula referamus:

| $t$ | $s$ | $s\sqrt[3]{t}$ |
|---:|---|---|
| 0 | 1, 0000 | 0, 0000 |
| 10 | 0, 6556 | 1, 4125 |
| 20 | 0, 4290 | 1, 1645 |
| 30 | 0, 2882 | 0, 8955 |
| 40 | 0, 2086 | 0, 7134 |
| 50 | 0, 1712 | 0, 6307 |
| 60 | 0, 1577 | 0, 6173 |
| 70 | 0, 1629 | 0, 6672 |
| 80 | 0, 1744 | 0, 7515 |
| 90 | 0, 1897 | 0, 8501 |
| 100 | 0, 2046 | 0, 9496 |
| 120 | 0, 2248 | 1, 1088 |
| 240 | 0, 1856 | 1, 1534 |
| 400 | 0, 1338 | 0, 9850 |

§. 8. Secundum hanc tabellam extruximus binas curuas, ad axem, in quo abfciffae $t$ capiuntur, relatas, qua-

 rum

Tab. III. Fig. 2. et 3. rum altera exhibet valores litterae $s$, altera vero (Fig. 3.) valores formulae $s\sqrt[s]{t}$, quae posterior figura ergo ipsam curuam, quam columnae tribuimus, repraesentabit, si modo notetur, applicatas secundum modulum multo maiorem esse expressas, quo variationes earum clarius in oculos inciderent. Principalis igitur quaestio huc redit, vtrum hae duae curuae, continuo magis prolongatae, tandem per axem sint transiturae? Manifestum enim est, talem transitum in ambabus curuis simul contingere debere.

§. 9. Quod si iam siue illam tabellam, siue figuras inde delineatas attente consideremus, circa valores litterae $s$ generatim obseruamus, eos propius versus axem conuergere, interea autem miris inflexionibus modo magis ab axe recedere modo propius accedere, atque adeo in hac curua plura maxima et minima occurrere; veluti, primum minimum deprehenditur prope abscissam $t = 60$; deinde vero applicatae iterum crescunt, vsque ad $t = 120$, inde vero iterum decrescunt propemodum vsque ad 400. Quamobrem, cum satis certi esse queamus, valores minimos, quippe qui secundum numeros 0, 1577 et 0, 1338 procedunt, continuo propius ad axem accedere, hinc iam satis probabile videtur, eos tandem, veruntamen valde sero, penitus euanescere, quod autem ob defectum subsidiorum calculi nondum definire licet.

§. 10. Simili modo propemodum res se habet in altera figura, quae ipsam columnae figuram referre censenda est, vbi ab initio $t = 0$ applicatae subito increscunt, vsque ad terminum circiter $t = 8$, vbi applicata singulari cal-

calculo circiter inuenta est $= 1,60$; hinc autem per $t = 10$ procedentes satis repente decrescunt, dum circa $t = 60$ minimum quasi valorem attingunt, hinc vero vsque ad $t = 120$ satis ingenti saltu assurgunt, inde multo lentius iterum decrescunt vsque ad $t = 400$, hincque iterum increscendo satis vniformiter ascendunt, quovsque quidem nobis calculum instituere licuit. Hic igitur nulla ratio occurrit, vnde concludere, probabili saltem modo, liceret, istas applicatas tandem penitus euanescere.

§. 11. Cum igitur ista quaestio maximi sit momenti atque sine dubio summam attentionem mereatur, haud parum lucis afferre poterit inuestigatio omnium locorum, vbi applicatae posterioris curuae euadunt vel maximae vel minimae, quandoquidem totum iudicium ad solas applicatas minimas reuocatur, quae si nusquam penitus euanescerent, certum id foret signum, conclusionem supra memoratam veritati esse consentaneam.

§. 12. Cum igitur applicatae huius curuae ibi fiant vel maximae vel minimae, vbi fuerit $\frac{dy}{dx} = 0$, ex serie supra exhibita concludimus

$$\frac{dy}{A\,dx} = 1 - \frac{x^3}{2.3m} + \frac{x^6}{2.3.5.6.m^2} - \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9.m^3} + \frac{x^{12}}{2.3.5.6.8.9.11.12.m^4} - \text{etc.}$$

Ponamus igitur vt ante $x^3 = mt$, ac perueniemus ad hanc aequationem infinitam:

$$0 = 1 - \frac{t}{2.3} + \frac{t^2}{2.3...5.6} - \frac{t^3}{2.3...5.6...8.9} + \frac{t^4}{2.3...5.6...8.9...11.12} - \text{etc.}$$

cuius ergo radices inuestigare oportet: euidens autem est pri-

primam, siue minimam radicem, aliquanto maiorem esse debere quam primum denominatorem $2 \cdot 3 = 6$.

§. 13. Calculus autem ad hoc negotium requisitus haud difficulter per logarithmos institui poterit; si enim ipsos terminos huius seriei per cyphras romanas designemus, vt sit $\mathrm{I} = 1$, logarithmi sequentium iuxta tabulam subnexam colligentur:

| | |
|---|---|
| $l\,\mathrm{II} = l\,\mathrm{I} + l\,t - l\,6$ | 0, 7781513 |
| $l\,\mathrm{III} = l\,\mathrm{II} + l\,t - l\,30$ | 1, 4771213 |
| $l\,\mathrm{IV} = l\,\mathrm{III} + l\,t - l\,72$ | 1, 8573325 |
| $l\,\mathrm{V} = l\,\mathrm{IV} + l\,t - l\,132$ | 2, 1205739 |
| $l\,\mathrm{VI} = l\,\mathrm{V} + l\,t - l\,210$ | 2, 3222193 |
| $l\,\mathrm{VII} = l\,\mathrm{VI} + l\,t - l\,306$ | 2, 4857214 |
| $l\,\mathrm{VIII} = l\,\mathrm{VII} + l\,t - l\,420$ | 2, 6232493 |
| $l\,\mathrm{IX} = l\,\mathrm{VIII} + l\,t - l\,552$ | 2, 7419391 |
| $l\,\mathrm{X} = l\,\mathrm{IX} + l\,t - l\,702$ | 2, 8463371 |
| $l\,\mathrm{XI} = l\,\mathrm{X} + l\,t - l\,870$ | 2, 9395193 |
| $l\,\mathrm{XII} = l\,\mathrm{XI} + l\,t - l\,1056$ | 3, 0236639 |
| $l\,\mathrm{XIII} = l\,\mathrm{XII} + l\,t - l\,1260$ | 3, 1003705 |
| $l\,\mathrm{XIV} = l\,\mathrm{XIII} + l\,t - l\,1482$ | 3, 1708482 |
| $l\,\mathrm{XV} = l\,\mathrm{XIV} + l\,t - l\,1722$ | 3, 2360331 |
| $l\,\mathrm{XVI} = l\,\mathrm{XV} + l\,t - l\,1980$ | 3, 2966652 |
| $l\,\mathrm{XVII} = l\,\mathrm{XVI} + l\,t - l\,2256$ | 3, 3533390 |
| $l\,\mathrm{XVIII} = l\,\mathrm{XVII} + l\,t - l\,2550$ | 3, 4065402 |
| $l\,\mathrm{XIX} = l\,\mathrm{XVIII} + l\,t - l\,2862$ | 3, 4566696 |
| $l\,\mathrm{XX} = l\,\mathrm{XIX} + l\,t - l\,3192$ | 3, 5040629 |

§. 14. Hoc modo primo fecimus calculum pro $t = 8$, prodiitque seriei summa negatiua $= -0,0149$; sumto

ſumto autem $t = 7, 50$, ſumma prodiit poſitiua $= 0,0318$, vnde concludimus, verum valorem primae radicis eſſe $t = 7, 840$, cui in curua reſpondere debet applicata maxima. Deinde, quia ex figura colligere licet, ſequens minimum cadere inter $t = 50$ et $t = 60$, inſtituto calculo pro $t = 60$, prodiit ſumma ſeriei $t = + 0, 1144$: at pro $t = 50$ prodiit ſumma $= - 0, 1791$; vnde tuto concludere licet, ipſum minimum reſpondere abſciſſae $t = 56, 10$.

§. 15. Pro ſequente maximo eruendo faciamus calculum pro abſciſſa $t = 150$, hincque ſeriei ſumma reperitur $= - 0, 0244$; at vero, ſumto $t = 145$, prodit $+ 0, 2736$; vnde concluditur, maximum iſtud conuenire cum $t = 149, 59$. Nimis autem operoſum foret iſtum calculum vlterius proſequi; verum ipſa aequatio ſuppeditat certam rationem, ſequentes valores ipſius $t$ ſatis exacte colligendi. Cum enim aequationis ſecundus terminus ſit $\frac{1}{4} t$, patet, ſi literae $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, denotent omnes radices ipſius $t$, tum neceſſario eſſe debere $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.} = \frac{1}{4}$. Praeterea vero rationes non deſunt, quod iſtae radices $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ſecundum legem ſatis ſimplicem progrediantur et earum differentiae ſecundae pro conſtantibus haberi poſſint. Quamobrem cum tres primae radices inuentae ſint $\alpha = 7, 84$, $\beta = 56, 10$ et $\gamma = 149, 59$, differentiae primae ſunt $48, 26$; $93, 49$; vnde oritur differentia ſecunda $45, 23$. Hinc igitur, quousque libuerit, loca maximorum et minimorum continuari poterunt. En paradigma:

| Diff. II. | Diff. I. | Termini. |
|---|---|---|
| 45, 23 | 48, 26 | 7, 84 Max. |
| 45, 23 | 93, 49 | 56, 10 Min. |
| 45, 23 | 138, 72 | 149, 59 Max. |
| 45, 23 | 183, 95 | 288, 31 Min. |
| 45, 23 | 229, 18 | 472, 26 Max. |
| 45, 23 | 274, 41 | 701, 44 Min. |
| 45, 23 | 319, 64 | 975, 85 Max. |
| 45, 23 | 364, 87 | 1295, 49 Min. |

§. 16. Poteſt etiam in genere talis ſeries inueſtigari, cuius ſumma ſit $= \frac{1}{s}$. Statuatur enim ſeries

$$s = \frac{1}{6} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{ etc.}$$

et cum hinc ſit

$$s - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{ etc.},$$

poſterior ſeries a priore ſublata relinquit hanc:

$$\frac{1}{6} = \frac{A-6}{6A} + \frac{B-A}{AB} + \frac{C-B}{BC} + \frac{D-C}{CD} + \text{ etc.}$$

Iam fiat

$$\frac{A-6}{6A} = \frac{1}{\alpha}, \text{ ſiue } \frac{6A}{A-6} = \alpha;$$

tum vero

$$\frac{AB}{B-A} = \beta, \ \frac{BC}{C-B} = \gamma, \text{ etc.}$$

hincque, ob $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, cognita, reperitur

$$A = \frac{6\alpha}{\alpha-6} = 25, 56, \ B = \frac{\beta A}{\beta - A} = 46, 95,$$

$$C = \frac{\gamma B}{\gamma - B} = 68, 43, \text{ etc.}$$

Iam nullum eſt dubium, quin iſti numeri, terminum primum ſequentes, ſatis regulariter progrediantur, et, niſi adeo progreſſionem arithmeticam conſtituant, tum ſaltem eorum diffe-

differentiae secundae quasi sint aequales. Sunt vero differentiae primae 19, 56; 21, 39; 21, 48; quae parum a numero 20 discrepant; sin autem differentias secundas admittere velimus, eae propemodum vnitati aequales statui possunt. Ceterum pro instituto nostro parum referet, siue valores, pro litteris $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. exhibiti, sint ad amussim exacti, nec ne, si adeo calculum vlterius prosequi vellemus; verum cum inde nihil plane certi circa Paradoxon memoratum concludere valeamus, atque etiamnunc in dubio sit relinquendum, vtrum curua nostra alicubi cum axe concurrat nec ne, hanc Analysin, quippe quae sola nihil decidere videtur, deseramus, nostramque quaestionem ex principiis Mechanicis examinemus.

## Examen eiusdem Paradoxi, ex Principiis Mechanicis petitum.

§. 17. Consideremus columnam quamcunque, cylindricam, determinatam A B, quae sub dato pondere, quod sit $= P$, corruat. Iam loco huius ponderis substituatur alia columna A P, eiusdem diametri, cuius longitudo sit $= p$, quae ergo, illi columnae superimposita, eundem effectum erit praestatura, et columnam A B diffringet. Tab. III. Fig. 4.

§. 18. Quanquam autem hoc modo obtinetur columna quasi vnica P A B, sub proprio pondere succumbens, tamen hinc quaestio nostra non conficitur. Quoniam enim haec columna in A quasi est dissecta, dubitari omnino nequit, quin talis columna, si continua, multo plus roboris esset habitura. Accuratius igitur examinemus, quomodo continuitas ambarum columnarum impedire possit, quo minus inferior columna A B frangatur, cum tamen hic

 esse-

effectus certe contingeret, si superior pars A P tantum simpliciter esset imposita.

§. 19. In superiore autem dissertatione columnam A B ita ab onere imposito rumpi sumus contemplati, vt primo instanti certam quandam curuaturam A Y B accipiat, dum termini A et B in eodem situ verticali perseuerant; atque hanc curuam ita comparatam esse inuenimus, vt in A cum verticali A B angulum finitae magnitudinis X A Y constituat, quoniam, positis coordinatis A X $=x$ et X Y $=y$, talis aequatio est eruta: $y=\alpha x - \beta x^2 +$ etc.; vnde, sumto $x$ infinite paruo, foret $y=\alpha x$, ideoque $\alpha$ exprimeret tangentem anguli X A Y. Haec igitur inflexio tanquam effectus spectari debet, a pondere columnae superimpositae A P oriundus.

§. 20. Manifestum autem est, istum effectum nullo modo produci posse, si superior columna cum inferiore firmiter esset connexa; propterea quod suprema portiuncula A X a situ verticali declinari nequit, nisi simul infima portiuncula superioris partis A P similem declinationem accipiat, ad alteram scilicet partem, veluti A Z, tendentem, quod autem ob continuitatem totius columnae contingere nequit.

§. 21. Quamdiu autem superior pars A P situm verticalem seruat, inferior portio A B, siquidem fractioni fuerit obnoxia, aliam inflexionem recipere nequit, nisi in qua angulus X A Y penitus euanescat, et curuae A Y tangens in puncto A sit verticalis. Quoniam igitur haec

ratio

ratio frangendi prorsus discrepat ab illa, quam supra tractauimus, in eam hic accuratius inquiramus.

§. 22. Hunc in finem supremam columnae AB portiunculam laqueari fixo esse infixam concipiamus, siue ita a viribus horizontalibus vtrinque detineri, vt a situ verticali deflectere penitus nequeat. Scilicet, dum portio AY incuruatur, ad punctum superius $a$ in situ verticali conseruandum, necesse est, vt a vi quadam horizontali $aq$ sollicitetur, ne istud punctum retrocedere queat, quem ergo effectum firmitas laquearis praestare est censenda. Tum vero, ne tota columna ab ista vi horizontali $aq$ prosterni queat; in puncto A aequalis vis horizontalis AQ, contrarie agens, est concipienda, quae istum effectum destruat. Interim tamen hae duae vires non impedire debent, quominus columna imposita AP toto suo pondere in columnam inferiorem agat, eamque deprimat.

Tab. III. Fig. 5.

§. 23. Ad hunc ergo casum euoluendum vocemus istas vires horizontales $AQ = aq = Q$, et interuallum $Aa = a$, ita vt nunc tres habeamus vires, quibus columna inferior sollicitatur, siquidem praeter has vires horizontales adhuc a pondere superimposito P deorsum vrgetur; a quibus viribus quomodo columna haec AB inflecti debeat, iam indagabimus, vbi quidem ipsum pondus columnae inferioris negligere licebit; nam si, eo neglecto, columna AB a pondere superimposito AP inflecti poterit, multo magis, accedente proprio pondere, talem inflexionem pati debebit.

§. 24. Ponamus igitur vt supra abscissam $AX = x$ et applicatam $XY = y$; atque a pondere incumbente P ad inflexionem in puncto Y producendam orietur mo-

mentum $= P \cdot y$. In eandem porro plagam a vi horizontali A Q = Q momentum nascitur $= Q\,x$; ab altera vero vi horizontali $a\,q = Q$ momentum producitur in plagam contrariam vergens, quod erit $= Q\,(\alpha + x)$; quibus tribus momentis collectis totum momentum, columnam principalem A B incuruans, erit $= P\,y - Q\,\alpha$.

§. 25. Hoc iam momento incuruationis inuento in §. 12. superioris dissertationis; *De oneribus, quae columnae gestare valent*, loco $O\,y$ tantum scribi oportebit $P\,y - Q\,\alpha$, vnde nanciscimur hanc aequationem:

$$P\,y - Q\,\alpha + \frac{Ekkddy}{dx^2} = o,$$

quae autem nunc ita integrari debet, vt, posito $x = o$, non solum fiat $y = o$, sed etiam $\frac{dy}{dx} = o$. Praeterea vero, si columnae altitudo ponatur $= a$, applicata $y$ insuper euanescere debet posito $x = a$.

§. 26. Diuidatur aequatio modo allata

$$P\,y - Q\,\alpha + \frac{Ekkddy}{dx^2} = o$$

per P, et ponatur $\frac{Ekk}{P} = c\,c$; tum vero fiat $\frac{Q\alpha}{P} = b$, vt habeatur haec aequatio simplicior:

$$y - b = -\frac{ccddy}{dx^2}, \text{ siue } z = -\frac{ccddz}{dx^2},$$

posito scilicet $y - b = z$, cuius integrale completum est

$$z = y - b = \mathfrak{A}\,\text{fin.}\,\frac{x}{c} + \mathfrak{B}\,\text{cof.}\,\frac{x}{c}.$$

Cum igitur, posito $x = o$, fieri debeat $y = o$, pro constantibus determinandis habetur primo haec determinatio: $\mathfrak{B} = -b$, deinde cum fit $\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{A}}{c}\,\text{cof.}\,\frac{x}{c} - \frac{\mathfrak{B}}{c}\,\text{fin.}\,\frac{x}{c}$, vt posito $x = o$ fiat quoque $\frac{dy}{dx} = o$, obtinetur haec altera

 aequa-

aequatio: $\mathfrak{A} = 0$; quocirca aequatio, curuam nostram exprimens, erit

$$y - b = -b \operatorname{cos.} \frac{x}{c}, \text{ siue } y = b\left(1 - \operatorname{cos.} \frac{x}{c}\right).$$

§. 27. Augeatur nunc abscissa $x$ vsque ad totam columnae altitudinem $a$, et quia, posito $x = a$, fieri debet $y = 0$, orietur haec noua aequatio: $b\left(1 - \operatorname{cos.} \frac{a}{c}\right) = 0$, cui satisfit ponendo $\operatorname{cos.} \frac{a}{c} = 1$. Fit autem $\operatorname{cos.} \frac{a}{c} = 1$ casibus $\frac{a}{c} = 0$, vel $\frac{a}{c} = 2\pi$, etc.; atque hinc pondus determinabitur, quod istam columnam ad rupturam adiget. Cum enim sit $c = \frac{a}{2\pi}$, ob $c = k\sqrt{\frac{E}{P}}$. (vid. §. 26.), reperitur hoc pondus $P = \frac{4\pi\pi Ekk}{aa}$, quae ergo quantitas pariter sequitur rationem quadruplicatam crassitiei directam et reciprocam duplicatam altitudinis. Cum igitur in casu praecedentis dissertationis inuentum fuisset onus $O = \frac{\pi\pi Ekk}{aa}$, nostro casu pondus, quod eadem columna, quando superne in A laqueari est infixa, gestare valet, quadruplo erit maius.

§. 28. Conuertatur nunc istud pondus P in columnam pariter cylindricam eiusdem diametri, ac ponatur, pondus nostrae columnae A B, cuius altitudo $= a$, esse $= A$, altitudinem vero illius columnae super imponendae, cuius pondus inuenimus $= \frac{4\pi\pi Ekk}{aa}$, $= p$, eritque

$$a : p = A = \frac{4\pi\pi Ekk}{aa},$$

vnde colligitur altitudo $p = \frac{4\pi\pi Ekk}{Aa}$. Quod si ergo talis columna A P inferiori A B imponatur, vt habeatur columna altitudinis $PB = a + \frac{4\pi\pi Ekk}{Aa}$, haec certe proprio sub suo pondere succumbere debebit, siquidem a viribus

ho-

horizontalibus A Q et $a q$ constringitur, quippe quae vires vicem gerunt continuitatis: quam ob rem nullum amplius dubium superesse potest, quin, remotis istis viribus horizontalibus, columna pariter sit prolapsura, quoniam remotio harum virium roborem columnae certe non auget.

§. 29. Ecce ergo revera exhiberi poterit columna tantae altitudinis, quae sub proprio pondere necessario prosternetur, quandoquidem hoc eueniet, si tota columnae altitudo fuerit $= a + \frac{4\pi\pi Ekk}{Aaa}$; atque adeo euidens est, talem columnam, notabiliter adeo breuiorem, fractioni resistere non posse. Ponatur enim altitudo inuenta

$$a + \frac{4\pi\pi Ekk}{Aaa} = b,$$

sitque C pondus columnae, cuius altitudo $= c$, ita vt sit

$$A = \frac{Ca}{c}, \text{ eritque } b = a + \frac{4\pi\pi cEkk}{Caa},$$

in qua expressione si quantitates C et $c$ vt constantes spectemus, eiusmodi valor pro $a$ assignari poterit, vnde altitudo $b$ minimum sortiatur valorem; reperitur enim differentiando

$$\frac{db}{da} = 1 - \frac{8\pi\pi cEkk}{Ca^3} = 0,$$

vnde colligitur

$$a^3 = \frac{8\pi\pi cEkk}{C} \text{ ideoque } a = 2\sqrt[3]{\frac{\pi\pi cEkk}{C}},$$

quo valore substituto fiet altitudo columnae caducae, quam quaerimus, $b = 3\sqrt[3]{\frac{\pi\pi cEkk}{C}}$. Hinc igitur tandem pro certo asseuerare possumus, pro quauis columnae crassitie et robore semper eiusmodi assignari posse altitudinem, quae vi proprium suum pondus sustinere resistere non valeat;

sicque

ficque paradoxon, et quaestio super eo nata, iam manifesto est soluta; quamobrem ea, quae in superiore dissertatione sub finem in sententiam, hic assertae contrariam, sunt allata, siue dubie exposita, nunc facile emendari poterunt.

§. 30. Quo vim formulae pro altitudine $b$ inuentae clarius perspiciamus, in eam introducamus onus, quod columna altitudinis $c$, cuius pondus statuimus $= C$, sustinere valet, et quod, per experimenta explorandum, tanquam cognitum spectemus. Sit istud onus $= \Gamma$, atque ex superiore dissertatione habemus $\frac{\pi\pi Ekk}{cc} = \Gamma$, ita vt habeamus $\pi\pi E kk = \Gamma cc$; qui ergo valor substituatur in formula pro altitudine $b$ inuenta, ac reperietur

$$b = 3 \sqrt[3]{\frac{\Gamma c^3}{C}} = 3 c \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{C}};$$

vbi fractio $\frac{\Gamma}{C}$ denotat, quoties onus, ab hac columna sustentatum, ipsum eius pondus superat, cuius ergo radix cubica, per $3c$ multiplicata, praebet altitudinem columnae ex eadem materia confectae et eiusdem diametri, quae sub proprio suo pondere certe succumbet.

§. 31. Quoniam igitur altitudinem $b$ inuenimus columnae, quae proprium pondus certe sustinere nequit, hinc iam vicissim in linea curua, quam modo ante inuenimus, eam abscissam assignare poterimus, cui applicata euanescens respondere debet. Primo scilicet, posito $E k k = m b b$, inter coordinatas $x$ et $y$ hanc adepti sumus aequationem:

$$\frac{y}{A} = x - \frac{x^4}{2.3.4.m} + \frac{1.4.x^7}{2\ldots7.m^2} - \frac{1.4.7.x^{10}}{2\ldots10.m^3} + \text{etc.}$$

deinde statuimus $\frac{x^3}{m} = t$, ita vt sit $t = \frac{x^3 bb}{Ekk}$. Modo autem vidimus esse $E k k = \frac{\Gamma q c}{\pi\pi}$. Quod si ergo iam hic ipsi pro-

tribuamus valorem totius altitudinis $b$, ob

$$b^3 = 27 c^3 . \frac{\Gamma}{C} \text{ fiet } t = \frac{27 b b \pi \pi c}{C}.$$

Quoniam autem $c$ exprimit altitudinem noſtrae columnae, et C eius pondus, erit $C = b b c$, quo valore ſubſtituto fit $t = 27 \pi \pi$; vnde diſcimus, iam ante terminum $t = 27 \pi \pi = 266$ circiter locum exiſtere debere, vbi applicata curuae, $y$, euaneſcit.

§. 33. Formula, quam pro maxima columnae altitudine inuenimus, ſcilicet: $b = 3 c \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{C}}$, ob ſummam ſimplicitatem maxima attentione eſt digna. Quanquam enim ex caſu columnae determinatae, cuius altitudo eſt $= c$, pondus vero $= C$, eſt deriuata: tamen facile generalis reddi atque ad omnes plane columnas cylindricas, ex eadem materia confectas, extendi poteſt. Poſita enim iſtius columnae amplitudine $= b b$, erit primo $C = b b c$; tum vero onus $\Gamma$, quod haec ſuſtentare valet, conſtat eſſe proportionale quadrato amplitudinis, diuiſo per quadratum altitudinis, ita vt ſit $\Gamma = \frac{b^4}{c c}$, quibus valoribus ſubſtitutis erit altitudo noſtra maxima $b = 3 \sqrt[3]{b b}$, vnde ſequens conſtituatur.

## Theorema maxime memorabile.

§. 34. *Maxima altitudo, qua columnae cylindricae, ex eadem materia confectae, proprium pondus etiamnunc ſuſtinere valent, tenet rationem ſubtriplicatam amplitudinis.* Ita ſi duae huiusmodi habeantur columnae, quarum diameter prioris ſit D, poſterioris vero $d$, altitudines maximae, quibus proprium pondus adhuc ſuſtentare valent, erunt vt $\sqrt[3]{DD} : \sqrt[3]{dd}$.

# DE
# ALTITVDINE COLVMNARUM
## SVB PROPRIO PONDERE CORRVENTIVM.

Auctore

*L. EVLERO.*

§. 1.

Cum nuper hanc quaestionem resoluere essem conatus pro curua, ad quam columnam ante inflecti concepi, quam frangeretur, inter abscissam verticalem $AX = x$ et applicatam horizontalem $XY = y$, hanc inueneram aequationem: $\int x\, dy + \frac{E\, ddy}{dx^2} = 0$; vbi littera E momentum elasticitatis, quo columna inflexioni resistit, complectitur, vnde valor ipsius $y$ per sequentem seriem infinitam exprimebatur: Tab. IV. Fig. 1.

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1.\, x^4}{2.\, 3.\, 4.\, E} + \frac{1.\, 4.\, x^7}{2. \ldots . 7 E^2} - \frac{1.\, 4.\, 7.\, x^{10}}{2. \ldots\ldots 10 E^3} + \text{etc.}$$

Hinc porro per constructionem nata est linea curua figurae prorsus mirabilis, innumerabiles applicatas, tam maximas quam minimas, continens, quae autem omnes ad eandem partem axis verticalis sitae videbantur, ita vt ista curua non nisi in infinitum continuata in ipsum axem incideret; quae circumstantia me seduxerat quasi, vt arbitrarer, columnarum altitudinem adeo sine periculo fractionis in infinitum augere posse. Postmodum vero ex aliis princi-



piis

piis clariſſime oſtendi, rem aliter ſe habere, et pro quouis columnarum robore certam altitudinem aſſignari poſſe, quam ſi ſuperent, certe proprio ponderi ſuccumberent.

§. 2. Cum autem aequatio ex certiſſimis principiis aequilibrii ſit deducta, nullius erroris coargui poteſt, ſi modo omnes rationes, quibus innititur, probe perpenduntur, nullaeque circumſtantiae immiſceantur ipſis principiis huius calculi contrariae; quamobrem, antequam hinc concluſiones deducere liceat, omnia momenta, ex quibus iſta ſingularis figura eſt deducta, accurate euoluere oportet. Ac primo quidem ſupremus columnae terminus A nulli prorſus actioni cuiusquam vis ſubiectus eſt aſſumtus, ita vt liberrime de ſuo loco moueri et reliquis viribus cedere poſſet, quae circumſtantia iam a ſtatu, quem in noſtra quaeſtione contemplamur, prorſus diſcrepat. Quando enim quaerimus, in quanta altitudine columnae etiamnunc proprium pondus ſuſtinere valeant, manifeſto ſupponimus, ſupremum terminum A, perinde ac infimum B, conſtanter in eadem recta verticali A B retineri, neque ab actione virium, quibus pars media incuruatur, de hoc ſitu dimoueri poſſe. Sin autem iſta circumſtantia praetermitteretur et ſupremo termino A plena libertas relinqueretur, nihil prorſus abſurdi in illa curua mirabili deprehendetur, ſed potius ſemper eiusmodi caſus aſſignari poterunt, quae cum iſta curua pulcherrime conueniant, id quod paucis oſtendere operae erit pretium.

§. 3. Ante omnia autem hic loco columnarum laminas elaſticas eiusdem roboris, mente ſaltem, ſubſtitui

tui conueniet: semper enim concipi potest lamina elastica, quae inflexioni tantum reluctetur, quantum columna fractioni resistit; totum autem discrimen in eo erit positum, quod lamina elastica a viribus sollicitantibus tantum incuruetur, dum columna, ab iisdem viribus sollicitata, disrumpitur. Hoc praemonito semper eiusmodi lamina elastica concipi poterit, quae, a solo suo pondere sollicitata, ad eam ipsam curuam inflecti atque adeo in aequilibrio consistere queat, quam ex aequatione initio allata deduximus; si modo obseruemus, in calculo illo omnes huius curuae applicatas X Y tanquam infinite paruas spectari debere, etiamsi in nostra figura multo maiores sint repraesentatae, quo variae inflexiones facilius perspici possent. Abscissae autem huius curuae ad eo maiorem altitudinem assurgent, quo fortiores fuerint laminae nostrae elasticae: applicatae vero, singulis abscissis respondentes, perpetuo eandem inter se rationem tenere sunt censendae.

§. 4. His notatis quaelibet portio huius curuae, veluti A Y, statum aequilibrii cuiuspiam laminae elasticae repraesentabit: scilicet semper assignari poterit lamina elastica longitudinis A Y, quae, si in Y secundum directionem suam firmiter retineatur, atque ad figuram Y A inflectatur, ob solum proprium pondus in hoc statu se conseruare possit, hocque modo punctum Y, vbicunque libuerit, accipere licet. Hic primum occurrunt ea puncta curuae, quibus applicatae sunt vel maximae vel minimae, vbi ergo tangentes sunt verticales. Quod si ergo quodpiam horum punctorum pro infimo termino laminae elasticae accipiatur, is pauimento quoque verticaliter infigi debebit, ut de hoc situ declinare nequeat; tum enim pars superior

Tab. IV. Fig. 2.

 figu-

figuram assignatam ob proprium pondus recipere simulque in aequilibrio consistere poterit.

§. 5. Praeterea vero in hac curua infinita dabuntur puncta, quae littera O designauimus, vbi datur punctum flexus contrarii, atque adeo curuatura prorsus euanescit; vnde si infimus laminae elasticae terminus in tali puncto accipiatur, non opus est, vt pauimento infigatur secundum suam directionem, sed sufficiet vt simpliciter insistat, et talis lamina ob proprium pondus figuram exhibitam recipere et in aequilibrio consistere poterit. Veluti si inferior laminae terminus in puncto O' capiatur, isque simpliciter pauimento E F insistat, tum ob solum proprium pondus lamina inflecti poterit secundum curuam O' N G M A, hocque statu in aequilibrio persistere, propterea quod totius huius laminae centrum grauitatis G perpendiculariter puncto O' imminebit; euidens autem est, hunc statum aequilibrii esse labilem, et laminam minima vi esse prolapsuram.

Tab. IV. Fig. 3.

§. 6. Hinc iam clarissime intelligimus, nullum horum casuum ad quaestionem propositam accommodari posse, quippe qua eiusmodi columna consideratur, cuius vterque terminus perpetuo in eadem recta verticali firmiter retineatur, dum in omnibus his casibus supremo termino A plena libertas conceditur; quamobrem, vt nostram quaestionem rite euoluamus, statum columnae, siue laminae elasticae, initialem aliter constituere debemus atque ante fecimus, scilicet praeter sollicitationes a grauitate oriundas supremo termino A certam quandam vim horizontalem applicatam concipere debemus, qua istud punctum A perpetuo in eadem recta verticali contineatur. Facile autem intelli-

telligitur, magnitudinem huius vis prius definiri non posse, quam totus calculus ad finem fuerit perductus; quandoquidem tum demum patebit, quanta vi opus sit, ad supremum terminum A in debito situ conseruandum. Quo autem haec noua inuestigatio clarius perspici queat, ipsi quaestioni principali maiorem extensionem tribuamus eamque sequenti modo constituamus.

## Status Quaestionis.

§. 6. Proposita sit columna cylindrica, in situ verticali A B constituta, siue eius loco lamina elastica eiusdem roboris, cuius autem ambo termini A et B perpetuo in hoc situ ita retineantur, vt ab aliis viribus sollicitantibus inde neutiquam dimoueri queant. Huic iam laminae elasticae circa medium C quandam vim horizontalem C *c* applicatam concipiamus, qua laminae figura incuruata A B C tribuatur, quam mutationem autem tam exiguam esse statuamus, vt tota curua quasi infinite parum a recta verticali A B discrepet. Hoc posito quaeramus naturam huius curuae A C B, ad quam, tam ab ista vi, quam a proprio pondere inflectetur; hac enim quaestione resoluta facile patebit, vtrum, si vis sollicitans C *c* euanesceret, talis inflexio certo casu nihilominus locum habere queat; hoc enim ipso continebitur casus, quo columna a solo proprio pondere prosternetur, quandoquidem ne minimam quidem curuaturam pati potest.

Tab. IV. Fig. 4.

§. 7. Quoniam vero haec quaestio non solum summam circumspectionem postulat, sed etiam plurimis difficultatibus est inuoluta, laborem nostrum ab euolutione casus simplicissimi inchoëmus, quo columnae omnis flexibili-

bilitas adimatur, eiusque loco in medio C eiusmodi iunctura tribuatur, quae cum certo elasticitatis momento flexurae resistat. Referat igitur recta verticalis A B talem columnam, cuius ambo termini A et B de suo loco amoueri nequeant; tum vero isti columnae in medio applicata sit vis horizontalis C $c$, qua haec columna in statum inflexum A C B sit perducta, atque tam ex pondere columnae quam vi applicata C $c$, ad momentum flexurae relata, quaeri debet status iste inflexus, siue anguli deflexionis a situ verticali C A O et C B O, qui quidem inter se erunt aequales, quia partes A C et B C aequales supponuntur.

Tab. IV. Fig. 5.

§. 8. Vt nunc solutionem huius casus ordine instituamus, primo omnes vires consideremus, quibus haec columna actu sollicitatur. Hic igitur occurrit pondus, quo vtrumque brachium C A et C B deorsum vrgetur. Posita igitur longitudine vtriusque C A et C B $= a$ vocetur pondus siue massa vtriusque $= M$, quae vis in vtriusque centro grauitatis seu medio applicata concipi potest; tum vero etiam actu sollicitatur a vi illa horizontali C $c$, quam vocemus $= C$. Praeterea vero, quatenus ambo brachia iam ad angulum A C $e$ sunt inflexa, loco vis elasticae mente substituamus elastrum E $e$, quod vi sua contractiua conetur ambo brachia in directum extendere. Quod si ergo vocemus angulum C A B $=$ C B A $= \theta$, erit angulus E C $e = 2\theta$, cui proportionalis statui potest vis elastri, siquidem hunc angulum tanquam minimum spectemus. Hinc ergo, si vim elasticam absolutam littera E et interuallum C E $=$ C $e$ littera $e$ designemus, momentum huius elastri erit $2 E e \theta$; vnde simul patet, si horizontalis C O ducatur, fore C O $= a$ sin. $\theta$ et A O $=$ B O $= a$ cos. $\theta$, sicque, quia angu-

angulus $\theta$ tanquam minimus spectatur, statuere poterimus $CO = a\theta$ et $AO = BO = a$.

§. 9. His autem viribus praeterea adiungi debent eae vires, quae requiruntur, ad columnam in statu, quem supponimus, retinendam. Primo igitur, quoniam terminus A perpetuo in recta verticali A B retineri debet, ibi applicemus vim horizontalem $A a$, quae sit $= A$, cuius valor autem nondum est cognitus, quandoquidem praecise tanta esse debet, vt punctum A in suo loco conseruetur. Deinde quia terminus inferior B fundo ita insistere assumitur, vt etiam de suo loco dimoueri nequeat, primo ipsum fundum sustinebit totum columnae pondus, vnde ipsum punctum B sursum vrgeri censendum est vi $BO = 2M$; dein vero, ne de suo loco, siue dextrorsum siue sinistrorsum, dimoueatur, illi vim horizontalem $Bb = B$ applicatam concipiamus, quae etiam inter incognita est referenda. Tota autem columna suo pondere ita aget, quasi eius pondus in communi centro grauitatis G vtriusque brachii esset applicatum, quod quia in medium interualli C O cadit, erit $OG = \frac{1}{2} a\theta$, cuius ergo directio erit recta verticalis $Gg$.

§. 10. Cum nunc totum hoc systema in aequilibrio consistere assumamus, primo omnes vires, ratione quantitatis, se mutuo destruere debent, vnde pro viribus horizontalibus habebimus hanc aequationem: $A + B = C$; vnde, simulac altera harum virium A et B fuerit cognita, etiam altera innotescet. Tum vero vires verticaliter agentes iam sibi contrariae sunt constitutae; tertio vero vires elastri, in puncta E et $e$ agentis, se mutuo perfecte destru-

 unt.

unt. Praeterea autem ad aequilibrium requiritur, vt momenta omnium harum virium, respectu cuiuscunque axis, se mutuo destruant: constat enim, si hoc eueniat pro quolibet axe, id simul pro omnibus aliis locum habere. Consideremus igitur momenta harum virium respectu puncti A, vbi ergo vis $A a = A$ et vis $B O = 2 M$ momenta euanescent, quia directiones per ipsum punctum A transeunt; at vis horizontalis $B b = B$ dabit momentum sinistrorsum vergens $= 2 a B$, vis vero horizontalis $C c = C$ dabit momentum dextrorsum vrgens $= C a$; vis denique verticalis $G g$ gignit momentum sinistrorsum, quod erit $M a \theta$; vnde nanciscimur hanc aequationem: $2 a B + M a \theta = C a$. Quoniam igitur iam ante inuenimus $A + B = C$, nunc vtramque seorsim determinare valemus: reperimus enim

$$A = \tfrac{1}{2} C + \tfrac{1}{2} M \theta \text{ et } B = \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} M \theta.$$

§. 11. His iam viribus determinatis ipsam resolutionem huius casus aggrediamur, quem in finem nostrum systema in puncto C fixum concipiamus, cuius ergo respectu vires, quae brachium C A seorsim sollicitant, se mutuo in aequilibrio seruare debent; tum enim vires, alterum brachium sollicitantes, se quoque sponte in aequilibrio continebunt. At vero brachium C A primo sollicitatur a vi $A a = A$, cuius momentum est $A a$, sinistrorsum tendens; in eandem vero etiam plagam tendet momentum, ex proprio pondere huius brachii ortum, quod est $\tfrac{1}{2} M a \theta$. In contrariam autem plagam hoc brachium ab elastro abripietur, cuius momentum est $2 E e \theta$, ideoque habebimus hanc aequationem: $A a + \tfrac{1}{2} M a \theta = 2 E e \theta$, quae, si loco A valor inuentus substituatur, dabit $\tfrac{1}{2} a C + M a \theta = 2 E e \theta$; in qua aequatione tota solutio nostri problematis continetur.

tur. Eadem autem aequatio etiam obtinetur ex confideratione alterius brachii. Primo enim hoc brachium vrgetur a vi $B b = B$, cuius momentum, finiftrorfum tendens, eft $B a$; deinde ex vi $B O = 2 M$, fiue reactione fundi, oritur momentum in eandem plagam vergens $= 2 M a \theta$; tum vero hoc brachium ob proprium pondus praebet momentum dextrorfum vergens $= \frac{1}{2} M a \theta$; denique vero ab elaftro in $e$ applicato oritur momentum etiam dextrorfum tendens $= 2 E e \theta$; ficque hinc orietur ifta aequatio:

$$B a + 2 M a \theta = \frac{1}{2} M a \theta + 2 E e \theta,$$

in qua fi loco $B$ fuus fcribatur valor, proueniet haec aequatio: $\frac{1}{2} C a + M a \theta = 2 E e \theta$.

§. 12. Cum igitur tota folutio cafus propofiti in hac aequatione contineatur: $2 E e \theta = \frac{1}{2} C a + M a \theta$, hinc ftatim angulus $\theta$ definiri poteft, ad quem noftra columna a propofita vi horizontali $C c$ deflecti poterit: erit enim $\theta = \frac{C a}{4 E e - 2 M a}$; vbi manifeftum eft, hunc cafum locum habere non poffe, nifi vis elaftica, in formula $E e$ contenta, multo maior fuerit quam $M a$, quandoquidem hic fupponimus, angulum $\theta$ valde effe exiguum. Hinc autem viciffim affignare poterimus vim horizontalem $C c = C$, quae valeat noftram columnam ad datum angulum $B A C = \theta$ deflectere: erit enim ifta vis $C = \frac{2 \theta}{a} (2 E e - M a)$. Hinc ftatim patet, dari eiusmodi cafus, quibus talis deflexio nullam vim horizontalem poftulat, atque adeo columna a proprio pondere ad hanc deflexionem vrgebitur; et quoniam angulus $\theta$ hic non determinatur, ifta columna a folo pondere continuo maiorem deflexionem recipiet, atque adeo penitus corruet. Hoc nempe toties eueniet, quoties fuerit

$M a = 2 E e$, qui eſt ipſe ille caſus, quem hic euoluere nobis propoſuimus.

§. 13. Hunc igitur caſum diligentius perpendamus, ac primo quidem ponamus, totam huius columnae altitudinem eſſe $AB = b$, ita vt ſit $a = \frac{1}{2} b$; tum vero ſit amplitudo huius columnae $= dd$; atque hinc ſumi poterit $M = \frac{1}{2} ddb$, quia M denotabat dimidiae columnae pondus. Hinc ergo poſtrema aequatio dabit $\frac{1}{4} bbdd = 2 E e$, vnde altitudo huius columnae ita determinabitur, vt ſit $b = \sqrt{\frac{8 E e}{dd}}$. Quoties ergo talis columna, qualem hic aſſumimus, quae ſcilicet nullam inflexionem recipere queat, praeterquam in ſuo medio, vbi momentum inflexioni reſiſtens ſit $E e$, tantam habeat altitudinem, vel maiorem, tum certe proprium ſuum pondus ſuſtinere non valebit, ſed penitus proſternetur; vnde iam nouum argumentum habemus contra opinionem ſupra memoratam, qua arbitratus ſum, nullam columnam ſub proprio pondere occumbere poſſe. Hoc igitur caſu expedito multo facilius reſolutionem quaeſtionis §. 6. et ſeqq. deſcriptae ſuſcipere poterimus.

## Reſolutio Quaeſtionis.

§. 14. Quoniam, ſi huic columnae vnica vis horizontalis in medio applicaretur, tota columna non in curuam continuam deflecteretur, totam iſtam vim horizontalem aequaliter per totam columnae altitudinem, quae ſit $AB = b$, diſtribuamus, ita vt, ſi tota illa vis horizontalis fuerit $= C$, elemento cuicunque $Xx = dx$ applicari debeat vis horizontalis elementaris $= \frac{C dx}{b}$. Tales igitur vires horizontales ſingulis columnae elementis applicatae concipiantur. Deinde etiam ſingula elementa ob proprium pon-

Tab. IV. Fig. 6.

pondus deorsum sollicitabuntur, viribus $\frac{Mdx}{b}$, siquidem M denotet pondus totius columnae; sicque iam habemus omnes vires, quibus haec columna actu sollicitatur; siquidem iis adiungamus momentum elasticitatis, quo haec columna in singulis punctis pollere statuitur; quod, vt hactenus fecimus, per formulam $Ekk$ repraesentemus.

§. 15. Praeterea vero, quoniam supremus columnae terminus A perpetuo in ea recta verticali retineri debet, ei horizontaliter applicatam concipiamus vim $Aa = A$; tum vero termino inferiori B, ob eandem rationem, applicemus vim horizontalem $Bb = B$. Porro vero iste terminus inferior, ob pondus columnae, verticaliter sursum vrgeri censendus est vi M; insuper autem in calculum introduci debebit centrum grauitatis columnae incuruatae, quod si ponamus cadere in punctum G, eius distantia ab axe reperietur $GO = \frac{\int y\,dx}{b}$. Posita enim abscissa $AX = x$ et applicata $XY = y$, ob inflexionem infinite paruam, elementum $Yy$ ipsi elemento abscissae $Xx$ aequale censeri potest. Cum igitur eius pondus sit $\frac{Mdx}{b}$, eius momentum, respectu axis AB, erit $\frac{Mydx}{b}$, cuius integrale, per totam columnam extensum, erit $\frac{M}{b}\int y\,dx$, cui ergo aequale esse debet momentum totius columnae, si eius pondus in puncto G esset collectum, quod ergo erit $M.GO$; vnde manifesto sequitur interuallum $GO = \frac{1}{b}\int y\,dx$, pro quo ergo interuallo inueniendo area totius curuae AYB inuestigari debet, sicque in hoc puncto G vis applicata est concipienda horizontalis $Gg = M$.

§. 16. Quoniam nunc primo omnes istae vires ratione quantitatis se inuicem destruere debent, pro viribus horizontalibus hanc nanciscimur aequationem: $A + B = C$; vires autem verticales iam se sponte destruunt, cum sit vis $BO = M$ et vis $Gg = M$. Praeterea vero necesse est, vt omnium harum virium momenta respectu puncti A se destruant: vbi ergo virium $Aa$ et $BO$ momenta per se sunt nulla, vis autem $Bb$ momentum sinistrorsum vergens erit $Bb$, atque in eundem sensum verget momentum, ex vi seu pondere columnae $Gg = M$, ortum, quod ergo momentum, ob $GO = \frac{\int y\,dx}{b}$, erit $\frac{M}{b}\int y\,dx$, hoc scilicet integrali per totam columnam extenso. Ne autem haec conditio calculum turbet, vocemus hoc interuallum $GO = g$, ita vt sit $g = \frac{\int y\,dx}{b}$ et momentum hinc natum erit $= Mg$. Superest igitur, vt omnia momenta ex omnibus viribus horizontalibus $YV = \frac{C\,dx}{b}$ nata, colligantur; quare, cum ex ista vi $YV$ nascatur momentum $\frac{Cx\,dx}{b}$, summa omnium horum momentorum per totam altitudinem erit $\frac{1}{2}Cb$, quod dextrorsum vergit, ita vt hinc obtineamus hanc aequationem: $Bb + Mg = \frac{1}{2}Cb$, ex qua aequatione statim colligimus $B = \frac{1}{2}C - \frac{Mg}{b}$, hincque porro alteram vim incognitam $A = \frac{1}{2}C + \frac{Mg}{b}$.

§. 17. Nunc iam totam columnam, quasi in puncto Y esset fixa, contemplemur, atque ex omnibus viribus arcum AY sollicitantibus, earum momenta inuestigemus respectu huius puncti Y, quippe quorum summa aequalis esse debet momento elasticitatis, quod quoniam a curuatura in hoc loco pendet, si radium osculi in hoc loco statuamus $= r$, ipsum elasticitatis momentum erit $\frac{Ekk}{r}$; prae-

terea

terea vero momentum vis $A\,a = A$, respectu huius puncti Y, est $A\,x$. Momenta autem, quae tam ex viribus horizontalibus quam verticalibus toti arcui A Y sunt applicatae, seorsim inuestigari debent.

§. 18. Cum igitur hic punctum Y tanquam fixum spectetur, arcum A Y secundum maiorem scalam hic seorsim repraesentemus, ita vt sit $A\,X = x$ et $X\,Y = y$, quas quantitates ergo tantisper quasi constantes spectari licet; tum autem consideretur huius arcus elementum quodcunque $U\,u$, per coordinates $A\,T = t$ et $T\,U = u$ determinatum, quae hic solae vt variabiles sunt tractandae. Cum igitur, ob deflexionem minimam, sit vt supra elementum $U\,u = T\,t = d\,t$, ei primo applicata erit vis horizontalis $U\,P = \frac{C\,d\,t}{b}$; praeterea vero eidem applicata est vis verticalis $U\,Q = \frac{M\,d\,t}{b}$. Illius igitur vis $U\,P = \frac{C\,d\,t}{b}$ momentum, respectu puncti Y, erit $\frac{C\,(x-t)\,d\,t}{b}$, cuius ergo integrale erit $\frac{C\,t}{b}\,(x - \frac{1}{2}\,t)$, quod summa horum momentorum per arcum A U continet. Promoueatur nunc punctum U vsque in Y, atque summa omnium horum momentorum, ex arcu A Y natorum, erit $\frac{\frac{1}{2}\,C\,x\,x}{b}$, cuius effectus dextrorsum tendit.

Tab. IV. Fig. 7.

§. 19. At vero pro viribus verticalibus, vis $U\,Q = \frac{M\,d\,t}{b}$ momentum respectu puncti Y erit

$$\frac{M\,d\,t}{b}\,Q\,Y = \frac{M\,(y-u)\,d\,t}{b},$$

quod sinistrorsum tendit, prorsus vt momentum vis $A\,a = A$. Integretur iam ista formula, vt obtineatur momentum ex arcu

ex A U oriundum, quod erit $\frac{M}{b}(yt-\int u\,dt)$. Promoueatur punctum $u$ vsque in $y$, faciendo $t = x$ et $u = y$, atque totum momentum, ex arcu A Y ortum, erit $\frac{M}{b}(xy-\int y\,dx)$, quae formula manifesto reducitur ad hanc: $\frac{M}{b}\int x\,dy$.

§. 20. Inuentis igitur his tribus momentis, quorum primum $Ax$ sinistrorsum, secundum $\frac{\frac{1}{2}Cxx}{b}$ dextrorsum, tertium vero modo inuentum, $\frac{M}{b}\int x\,dy$, iterum sinistrorsum agit, totum momentum sinistrorsum vrgens erit $Ax+\frac{M}{b}\int x\,dy-\frac{Cxx}{2b}$, cui ergo aequale esse debet momentum elasticitatis $\frac{Ekk}{r}$, quippe quod dextrorsum vergit, vnde adipiscimur hanc aequationem:

$$Ax+\frac{M}{b}\int x\,dy-\frac{Cxx}{2b}=\frac{Ekk}{r},$$

quae, si loco A valorem ante inuentum substituamus, induet hanc formam:

$$\frac{1}{2}Cx-\frac{Cxx}{2b}+\frac{Mgx}{b}+\frac{M}{b}\int x\,dy=\frac{Ekk}{r}.$$

In hac ergo aequatione omnia continentur, quae circa solutionem problematis propositi desiderari possunt.

§. 21. Quoniam autem radius osculi etiamnunc in hac aequatione reperitur, propter applicatas $y$ vt infinite paruas spectandas statui poterit $r=-\frac{dx^2}{ddy}$, si quidem elementum $dx$ pro constante accipiatur. Hinc ergo nostra aequatio erit:

$$\left(\frac{1}{2}C+\frac{Mg}{b}\right)x-\frac{Cxx}{2b}+\frac{M}{b}\int x\,dy+\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}=0,$$

quae per $\frac{M}{b}$ diuisa euadit:

$$\left(\frac{Cb}{2M}+g\right)x-\frac{Cxx}{2M}+\int x\,dy+\frac{Ebkk\,ddy}{M\,dx^2}=0,$$

vbi

vbi notetur, fractionem $\frac{M}{b}$ amplitudinem columnae exprimere, neque adeo ab altitudine columnae $b$ pendere. Si enim amplitudo columnae ponatur $= bb$, statui poterit $M = bbb$; quo obseruato aequatio nostra hanc induet formam:

$$\left(\frac{C}{2bb} + g\right) x - \frac{Cxx}{2bbb} + \int x\,dy + \frac{Ekkddy}{bb.dx^2}.$$

Deinde etiam initio ostendimus, formulam $Ekk$ quadrato amplitudinis, seu ipsi $b^4$, esse proportionalem, vnde statuere poterimus, $Ekk = b^4 e$, vbi $e$ est linea, vi elasticae absolute proportionalis. Hoc igitur valore introducto aequatio sequentem induet formam:

$$\left(\frac{C}{2bb} + g\right) x - \frac{Cxx}{2bbb} + \int x\,dy + ebb.\frac{ddy}{dx^2} = 0,$$

vnde ergo per geminam integrationem valor applicatae $y$, per abscissam $x$ expressus, erui debet, quod aliter nisi per series infinitas praestari nequit.

§. 22. Vt autem istae integrationes rite ad statum quaestionis accommodentur, sequentia praecepta sunt tenenda:

1°. Formulae $\int x\,dy$ integrale ita capi debet, vt euanescat posito $x = 0$.

2°. Quia curua necessario per ipsum punctum A transit, altera aequationis nostrae integratio ita debet determinari, vt posito $x = 0$ fiat quoque $y = 0$.

3°. Altera vero integratio pro abscissis minimis dare debet talem aequationem: $y = \alpha x$; vbi ergo ista constans $\alpha$ designat tangentem anguli, quem curua cum axe in A constituit, vel adeo ipsum hunc angulum, siqui-

dem vt infinite paruus est spectandus. Hic autem imprimis est obseruandum, istum angulum $\alpha$ effectum totum exhibere, quem vis horizontalis C, columnae applicata, producere valet. Hoc igitur modo series infinita reperiri poterit, quae pro qualibet abscissa $x$ quantitatem applicatae $y$ determinabit.

§. 23. Integratione autem hac lege instituta eam conditionem principalem adimpleri oportet, quae postulat, vt, posita abscissa $x = b$, applicata $y$ denuo euanescat. Hoc igitur modo obtinebitur aequatio, meras quantitates constantes inuoluens; eas scilicet, quae in aequatione differentiali continentur, ac praeterea angulum deflexionis $\alpha$. Hinc autem ipsam hanc deflexionem $\alpha$, quatenus a vi horizontali C producitur, nondum definire licet, quoniam in hac aequatione adhuc inest quantitas $g$, interuallum GO exprimens, cuius valor nunc demum per integrationem, ex aequatione inter $x$ et $y$ inuenta, definiri debet. Vidimus enim esse $g = \frac{\int y dx}{b}$, postquam scilicet integrale $\int y\, dx$ a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = b$ fuerit extensum.

§. 24. Postquam igitur aequatio inter $x$ et $y$ fuerit inuenta, ex ea per integrationem euoluatur formula $\int y\, dx$, quae, per totam altitudinem extensa, praebebit valorem producti $g\, b$; sicque denuo hinc colligitur aequatio inter easdem quantitates constantes, quae ergo si cum superiore aequatione combinetur, inde quantitas $g$ eliminari poterit, quo facto habebitur noua aequatio, ex qua pro quauis vi horizontali C definiri poterit angulus deflexionis

xionis $\alpha$, quandoquidem reliquae quantitates in aequatione contentae omnes tanquam datae spectari possunt.

§. 25. Ex hac autem vltima aequatione, vnde valorem ipsius $\alpha$ elici oportet, simul patebit, eiusmodi dari casus, quibus eadem deflexio $\alpha$ oriri potest, etiamsi vis horizontalis C prorsus euanescat; atque hinc orietur casus, quem hic praecipue examinare constituimus, quo scilicet in eam columnae altitudinem inquirimus, quam si columna attigerit, ob proprium pondus incuruari incipiat, atque adeo frangatur, quare ad hunc casum analysin superiorem accommodabimus.

## Inuestigatio maximae altitudinis, qua columna adhuc proprium suum pondus sustinere valet.

§. 26. Pro hoc ergo casu statim ponamus vim horizontaliter applicatam $C = 0$, et iam aequatio nostra differentio-differentialis erit:

$$g x + \int x\, d y + e b b . \frac{d d y}{d x^2} = 0,$$

in qua loco $e b b$ br. gr. scribamus litteram $m$, pro cuius integrali si fingamus seriem

$$y = \alpha x + \beta x x + \gamma x^3 + \delta x^4 \text{ etc.}$$

mox patebit, fore $\beta = 0$, simulque omnes potestates sequentes ipsius $x$, quarum exponentes sunt formae $3n + 2$; tum vero potestatum, quarum exponentes sunt formae $3n + 1$, coefficientes tantum per literam $\alpha$ determinari; at vero potestatum, quarum exponentes sunt formae $3n$, coefficientes per solam litteram $g$ definiri.

§. 27. Hinc ergo statim valorem ipsius $y$ in duas partes diuellere poterimus, quae sint $y = \alpha p + g q$; hoc autem valore introducto aequatio nostra erit

$$g x + \alpha \int x\, dp + g \int x\, dq + m \alpha . \frac{ddp}{dx^2} . m g . \frac{ddq}{dx^2} = 0.$$

vnde hae duae aequationes deriuantur:

$$\text{I. } \int x\, dp + m \frac{ddp}{dx^2} = 0.$$

$$\text{II. } x + \int x\, dq + m \frac{ddq}{dx^2} = 0.$$

Pro priore, quoniam nouimus, primum terminum ipsius $p$ esse $x$, statuamus $p = x - A x^4 + B x^7 + C x^{10} +$ etc. factaque substitutione perueniemus ad sequentem aequationem:

$$0 = \begin{cases} \frac{m\, ddp}{dx^2} = -4.3 m A x^2 + 7.6 m B x^5 - 10.9 m C x^8 + 13.12. m D x^{11} \text{ etc.} \\ \int x\, dp = \frac{1}{2} x x - \frac{4}{5} A x^5 + \frac{7}{8} B x^8 - \frac{10}{11} C x^{11} + \text{etc.} \end{cases}$$

vnde ergo coefficientes assumti sequenti modo determinantur:

$$A = \frac{1}{2.3.4.m}; \quad B = \frac{4 A}{5.6.7.m} = \frac{1.4.}{2.3. \ldots . 7 m^2},$$

$$C = \frac{7 B}{8.9.10.m} = \frac{1.4.7.}{2.3. \ldots 10. m^3}.$$

$$D = \frac{10 C}{11.12.13.m} = \frac{1.4.7.10.}{2.3. \ldots 13. m^4}, \text{ etc.}$$

Pro valore ipsius $q$, ex altera aequatione eruendo, fingamus $q = -\mathfrak{A} x^3 + \mathfrak{B} x^6 - \mathfrak{C} x^9 + \mathfrak{D} x^{12} -$ etc. et facta substitutione perueniemus ad hanc aequationem:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m\, ddq}{dx^2} = -3.2 m \mathfrak{A} x + 6.5 m \mathfrak{B} x^4 - 9.8 m \mathfrak{C} x^7 + 12.11 m \mathfrak{D} x^{10} - \text{etc.} \\ \int x\, dq = \qquad -\frac{3}{4} \mathfrak{A} x^4 + \frac{6}{7} \mathfrak{B} x^7 - \frac{9}{10} \mathfrak{C} x^{10} + \text{etc.} \\ + x = + 1. x \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{array} \right\} = 0$$

vnde ergo coefficientes assumti sequenti modo determinabuntur:

$\mathfrak{A} =$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2.3.m}; \quad \mathfrak{B} = \frac{3\,\mathfrak{A}}{4.5.6.m} = \frac{1.3}{2.3.\ldots.6\,m^2}; \quad \mathfrak{C} = \frac{1.3.6}{2.3.\ldots 9\,m^3};$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1.3.6.9}{2.3.\ldots\ldots 12\,m^4}; \text{ etc.}$$

§. 28. Pro his igitur litteris $p$ et $q$, habebimus iſtas ſeries infinitas:

$$p = x - \frac{x^4}{2.3.4.m} + \frac{1.4.x^7}{2.3.\ldots.7.m^2} - \frac{1.4.7.x^{10}}{2.3.\ldots\ldots 10\,m^3} + \text{etc.}$$

$$q = -\frac{x^3}{2.3\,m} + \frac{1.3\,x^6}{2.3.\ldots.6.m^2} - \frac{1.3.6.x^9}{2.3.\ldots\ldots 9\,m^3} + \text{etc.}$$

quibus ſeriebus inuentis erit $y = \alpha p + g q$. Statuamus $x = b$, et quia fieri debet $y = 0$, habebimus hanc primam aequationem pro ſolutione noſtri problematis: $\alpha p + g q = 0$. At vero pro valore literae $g$ eruendo, cum ſit $g b = \int y\,dx = \alpha \int p\,dx + g \int q\,dx$, his integralibus ab $x = 0$ ad $x = b$ extenſis, habebimus primo

$$\int p\,dx = \tfrac{1}{2} x^2 - \frac{x^5}{2.3.5\,m} + \frac{1.4\,x^8}{2.3.\ldots 8\,m^2} - \frac{1.4.7.x^{11}}{2.3.\ldots\ldots 11\,m^3} + \text{etc. et}$$

$$\int q\,dx = -\frac{x^4}{2.3.4\,m} + \frac{1.3.x^7}{2.3.\ldots.7.m^2} - \frac{1.3.6.x^{10}}{2.3.\ldots\ldots 10.m^3} + \text{etc.}$$

vbi ergo, poſtquam poſuerimus $x = b$, oriri debet haec aequatio: $g b = \alpha \int p\,dx + g \int q\,dx$, vnde deducimus

$$g = \frac{\alpha \int p\,dx}{b - \int q\,dx},$$

qui valor in ſuperiore aequatione $\alpha p + g q = 0$ ſubſtitutus praebet

$$p + \frac{q \int p\,dx}{b - \int q\,dx} = 0,$$

ſiue $b p - p \int q\,dx + q \int p\,dx = 0$, quae aequatio duas tantum quantitates $b$ et $m$ inuoluit, ex qua ergo valorem ipſius $b$ eruere licebit, hicque valor ipſam illam maximam altitudinem columnae declarabit, in qua ſe tantum non ſuſtinere valebit.

§. 29 Quo nunc has formulas propius ad calculum accommodemus, ponamus $\frac{x^3}{m} = \frac{b^3}{m} = t$, atque ſeries, quibus indigemus, ſequenti modo deſignemus, poſito ſcilicet vbique $x = b$:

$$p = b\left(1 - \frac{1.t}{2.3.4} + \frac{1.4\,t^2}{2.\ldots.7} - \frac{1.4.7\,t^3}{2.\ldots.10} + \text{etc.}\right) = b.\,P$$

$$q = -1\left(\frac{t}{2.3} - \frac{1.3\,t^2}{2.\ldots.6} + \frac{1.3.6\,t^3}{2.\ldots.9} - \text{etc.}\right) = -1.\,Q$$

$$\int p\,dx = b^2\left(\tfrac{1}{2} - \frac{t}{2.\ldots.5} + \frac{1.4\,t^2}{2.\ldots.8} - \frac{1.4.7\,t^3}{2.\ldots.11} + \text{etc.}\right) = -b^2.\,P'$$

$$\int q\,dx = -b\left(\frac{t}{2.3.4} - \frac{1.3\,t^2}{2.\ldots.7} + \frac{1.3.6\,t^3}{2.\ldots.10} - \text{etc.}\right) = -b\,Q'.$$

Quod ſi iam iſtos nouos valores introducamus, poſtrema noſtra aequacio ſequentem induet formam:

$$bb\,P + bb\,P\,Q' - bb\,Q\,P' = 0,$$

et per $bb$ diuiſa fit $P + P\,Q' - Q\,P' = 0$, quae aequatio nullam aliam literam inuoluit niſi $t$, vnde ergo ſi definire licuerit hanc quantitatem $t$, erit $b = \sqrt[3]{mt}$, hoc eſt $t = \sqrt[3]{bbet}$ = altitudini columnae quaeſitae; vbi valor $t$ eſt numerus quidam abſolutus, ex illa aequatione eruendus. Quare cum $e$ pro eadem materia, ex qua columnae conficiuntur, eundum retineat valorem, pro variis amplitudinibus columuarum maximae altitudines quaeſitae ſequuntur rationem ſubtriplicatam altitudinum, id quod egregie conuenit cum theoremate diſſertationi praecedenti annexo.

§. 30. Vt igitur iſta altitudo $b$ per calculum definiri poſſit, ſequentes quatuor ſeries, quantitatem incognitam $t$ inuoluentes, rite euolui debebunt:

$$P = 1 - \frac{1.t}{2.3.4} + \frac{1.4.t^2}{2.\ldots.7} - \frac{1.4.7.t^3}{2.\ldots.10} + \text{etc.}$$

$$P' = \tfrac{1}{2} - \frac{1.t}{2.\ldots.5} + \frac{1.4.t^2}{2.\ldots.8} - \frac{1.4.7.t^3}{2.\ldots.11} + \text{etc.}$$

Q =

$$Q = \frac{1 . t}{2 . 3} - \frac{1 . 3 . t^2}{2 \ldots 6} + \frac{1 . 3 . 6 . t^3}{2 \ldots 9} - \text{etc.}$$
$$Q' = \frac{1 . t}{2 . 3 . 4} - \frac{1 . 3 . t^2}{2 \ldots 7} + \frac{1 . 3 . 6 . t^3}{1 \ldots 10} - \text{etc.}$$

atque nunc totum negotium huc redit, vt ille valor ipſius $t$ inueſtigetur, quo huic aequationi ſatisfiat: $P + PQ' - QP' = 0$, id quod aliter niſi tentando fieri nequit: plures ſcilicet pro $t$ aſſumi conueniet ſucceſſiue valores, atque ex erroribus ſingulorum concludi poterit verus valor ipſius $t$. Mox autem inueſtiganti patebit, valorem ipſius $t$ non exiguum eſſe, ſed potius ſatis magnum accipi debere.

§. 31. Poſtquam autem hinc verus valor numeri $t$ fuerit erutus, vt inde ſtatim quaeſitam altitudinem $b$ in menſura penitus cognita aſſignare valeamus, ponamus haberi columnam cylindricam, ex eadem materia paratam, cuius altitudo ſit $= a$, amplitudo vero $= dd$, et quae per experimenta comperta ſit geſtare poſſe onus $\Gamma$, quod ſe habeat ad pondus huius columnae, vt $\lambda : 1$, ita vt ſit $\Gamma = \lambda\, a d d$. Iam ex iis, quae de vi columnarum iam olim ſunt tradita, iſtud onus $\Gamma$ inuentum eſt

$$\Gamma = \frac{\pi \pi E k k}{a a},$$

exiſtente $E k k = d^4 e$, vnde ergo fiet

$$e = \frac{\Gamma a a}{\pi \pi d^4} = \frac{\lambda a^3}{\pi \pi d d}.$$

Subſtituatur ergo iſte valor in formula noſtra pro $b$ inventa, ac reperietur

$$b = a \sqrt[4]{\frac{\lambda b b}{\pi \pi d d}}.$$

vbi iam omnia elementa penitus ſunt cognita.

Calculus

# Calculus

## Pro inueſtigando valore numeri *t*.

§. 32. Quoniam hic quatuor ſeries euolui debent, deſignemus terminos cuiusque ſeriei ordine per cyphras romanas I, II, III, IV, etc. atque pro ſeriebus P et P′, in ſubſidium vocentur ſequentes formulae:

| Pro ſerie P | | Pro ſerie P′ |
|---|---|---|
| $l\,\mathrm{II} = l\,\mathrm{I} + lt$ . | $-1,3802112$ | $\mathrm{II}' = \frac{1}{5}\,\mathrm{II}$ |
| $l\,\mathrm{III} = l\,\mathrm{II} + lt$ . | $-1,7201593$ | $\mathrm{III}' = \frac{1}{8}\,\mathrm{III}$ |
| $l\,\mathrm{IV} = l\,\mathrm{III} + lt$ . | $-2,0122340$ | $\mathrm{IV}' = \frac{1}{11}\,\mathrm{IV}$ |
| $l\,\mathrm{V} = l\,\mathrm{IV} + lt$ . | $-2,2345173$ | $\mathrm{V}' = \frac{1}{14}\,\mathrm{V}$ |
| $l\,\mathrm{VI} = l\,\mathrm{V} + lt$ . | $-2,4123950$ | $\mathrm{VI}' = \frac{1}{17}\,\mathrm{VI}$ |
| $l\,\mathrm{VII} = l\,\mathrm{VI} + lt$ . | $-2,5603551$ | $\mathrm{VII}' = \frac{1}{20}\,\mathrm{VII}$ |
| $l\,\mathrm{VIII} = l\,\mathrm{VII} + lt$ . | $-2,6869185$ | $\mathrm{VIII}' = \frac{1}{23}\,\mathrm{VIII}$ |
| $l\,\mathrm{IX} = l\,\mathrm{VIII} + lt$ . | $-2,7974566$ | $\mathrm{IX}' = \frac{1}{26}\,\mathrm{IX}$ |
| $l\,\mathrm{X} = l\,\mathrm{IX} + lt$ . | $-2,8955551$ | $\mathrm{X}' = \frac{1}{29}\,\mathrm{X}$ |
| $l\,\mathrm{XI} = l\,\mathrm{X} + lt$ . | $-2,9837228$ | $\mathrm{XI}' = \frac{1}{32}\,\mathrm{XI}$ |
| $l\,\mathrm{XII} = l\,\mathrm{XI} + lt$ . | $-3,0637814$ | $\mathrm{XII}' = \frac{1}{35}\,\mathrm{XII}$ |
| $l\,\mathrm{XIII} = l\,\mathrm{XII} + lt$ . | $-3,1370931$ | $\mathrm{XIII}' = \frac{1}{38}\,\mathrm{XIII}$ |
| $l\,\mathrm{XIV} = l\,\mathrm{XIII} + lt$ . | $-3,2047065$ | $\mathrm{XIV}' = \frac{1}{41}\,\mathrm{XIV}$ |
| $l\,\mathrm{XV} = l\,\mathrm{XIV} + lt$ . | $-3,2674417$ | $\mathrm{XV}' = \frac{1}{44}\,\mathrm{XV}$ |
| $l\,\mathrm{XVI} = l\,\mathrm{XV} + lt$ . | $-3,3259545$ | $\mathrm{XVI}' = \frac{1}{47}\,\mathrm{XVI}$ |
| $l\,\mathrm{XVII} = l\,\mathrm{XVI} + lt$ | $-3,3807774$ | $\mathrm{XVII}' = \frac{1}{50}\,\mathrm{XVII}$ |
| $l\,\mathrm{XVIII} = l\,\mathrm{XVII} + lt$ | $-3,4323474$ | $\mathrm{XVIII}' = \frac{1}{53}\,\mathrm{XVIII}$ |
| $l\,\mathrm{XIX} = l\,\mathrm{XVIII} + lt$ | $-3,4810291$ | $\mathrm{XIX}' = \frac{1}{56}\,\mathrm{XIX}$ |
| $l\,\mathrm{XX} = l\,\mathrm{XIX} + lt$ | $-3,5271282$ | $\mathrm{XX}' = \frac{1}{59}\,\mathrm{XX}$ |

§. 33.

§. 33. Simili modo pro computo ſerierum Q et et Q′ inſeruient ſequentes formulae:

| Pro ſerie Q | Pro ſerie Q′ |
|---|---|
| $l\,I = \ldots + lt - 0{,}7781513$ | $I' = \frac{1}{4}\,I$ |
| $l\,II = l\,I \ldots + lt - 1{,}6020600$ | $II' = \frac{1}{7}\,II$ |
| $l\,III = l\,II \ldots + lt - 1{,}9242793$ | $III' = \frac{1}{10}\,III$ |
| $l\,IV = l\,III \ldots + lt - 2{,}1663314$ | $IV' = \frac{1}{13}\,IV$ |
| $l\,V = l\,IV \ldots + lt - 2{,}3569815$ | $V' = \frac{1}{16}\,V$ |
| $l\,VI = l\,V \ldots + lt - 2{,}5137501$ | $VI' = \frac{1}{19}\,VI$ |
| $l\,VII = l\,VI \ldots + lt - 2{,}6467304$ | $VII' = \frac{1}{22}\,VII$ |
| $l\,VIII = l\,VII \ldots + lt - 2{,}7621424$ | $VIII' = \frac{1}{25}\,VIII$ |
| $l\,IX = l\,VIII \ldots + lt - 2{,}8640659$ | $IX' = \frac{1}{28}\,IX$ |
| $l\,X = l\,IX \ldots + lt - 2{,}9553135$ | $X' = \frac{1}{31}\,X$ |
| $l\,XI = l\,X \ldots + lt - 3{,}0379043$ | $XI' = \frac{1}{34}\,XI$ |
| $l\,XII = l\,XI \ldots + lt - 3{,}1133355$ | $XII' = \frac{1}{37}\,XII$ |
| $l\,XIII = l\,XII \ldots + lt - 3{,}1727474$ | $XIII' = \frac{1}{40}\,XIII$ |
| $l\,XIV = l\,XIII \ldots + lt - 3{,}2470286$ | $XIV' = \frac{1}{43}\,XIV$ |
| $l\,XV = l\,XIV \ldots + lt - 3{,}3068844$ | $XV' = \frac{1}{46}\,XV$ |
| $l\,XVI = l\,XV \ldots + lt - 3{,}3628844$ | $XVI' = \frac{1}{49}\,XVI$ |
| $l\,XVII = l\,XVI + lt - 3{,}4154951$ | $XVII' = \frac{1}{52}\,XVII$ |
| $l\,XVIII = l\,XVII + lt - 3{,}4651028$ | $XVIII' = \frac{1}{55}\,XVIII$ |
| $l\,XIX = l\,XVIII + lt - 3{,}5120318$ | $XIX' = \frac{1}{58}\,XIX$ |
| $l\,XX = l\,XIX \ldots + lt - 3{,}5565564$ | $XX' = \frac{1}{61}\,XX$ |

§. 34. Nunc igitur tantum opus eſt, vt numero $t$ varii valores tribuantur pro lubitu, qui tamen non nimium a veritate abhorrere videantur; quare cum in praecedente differtatione oſtenderimus, hunc numerum $t$ certe minorem eſſe quam 266, incipiamus noſtram inueſtigatio-

 nem

nem a valore $t = 200$, visuri, vtrum iste valor iusto sit maior, an minor. Quod si enim hinc valor formulae nostrae $P(1 + Q') - QP'$ prodierit positiuus, id erit indicio, istum valorem $t = 200$ esse nimis paruum; sin autem prodierit negatiuus, numerum $t$ diminui oportebit.

§. 35. Sumamus igitur $t = 200$ et calculus pro seriebus $P$ et $P'$ ita stabit:

| | Pro serie P. | Pro serie P'. |
|---|---|---|
| $l\,I = 0,0000000$ | $I = +1,0000$ | $I' = +0,5000$ |
| $l\,t = 2,3010300$ | | |
| 2,3010300 | | |
| 1,3802112 | | |
| $l\,II = 0,9208188$ | $II = -8,3333$ | $II' = -1,6667$ |
| 2,3010300 | $-7,3333$ | $-1,1667$ |
| 3,2218488 | | |
| 1,7201593 | | |
| $l\,III = 1,5016895$ | $III = +31,7460$ | $III' = +3,9682$ |
| 2,3010300 | $+24,4127$ | $+2,8015$ |
| 3,8027195 | | |
| 2,0122340 | | |
| $l\,IV = 1,7904855$ | $IV = -61,7285$ | $IV' = -5,6117$ |
| 2,3010300 | $-37,3158$ | $-2,8102$ |
| 4,0915155 | | |
| 2,2345173 | | |
| $l\,V = 1,8569982$ | $V = +71,9446$ | $V' = +5,1389$ |
| | $+34,6288$ | $+2,3287$ |

$l\,V =$

| | Pro ſerie P. | Pro ſerie P'. |
|---|---|---|
| $lV$ = 1,8569982 | V = + 71,9446 | V' = + 5,1389 |
| 2,3010300 | + 34,6288 | + 2,3287 |
| 4,1580282 | | |
| 2,4123950 | | |
| $lVI$ = 1,7456332 | VI = − 55,6715 | VI' = − 3,2748 |
| 2,3010300 | − 21,0427 | − 0,9461 |
| 4,0466632 | | |
| 2,5603551 | | |
| $lVII$ = 1,4863081 | VII = + 30,6414 | VII' = + 1,5321 |
| 2,3010300 | + 9,5987 | + 0,5860 |
| 3,7873381 | | |
| 2,6869185 | | |
| $lVIII$ = 1,1004196 | VIII = − 12,6014 | VIII' = − 0,5479 |
| 2,3010300 | − 3,0027 | + 0,0381 |
| 3,4014496 | | |
| 2,7974566 | | |
| $lIX$ = 0,6039930 | IX = + 4,0179 | IX' = + 0,1545 |
| 2,3010300 | + 1,0152 | + 0,1926 |
| 2,9050230 | | |
| 2,8955551 | | |
| $lX$ = 0,0094679 | X = − 1,0220 | X' = − 0,0352 |
| 2,3010300 | − 0,0068 | + 0,1574 |
| 2,3104979 | | |
| 2,9837228 | | |
| $lXI$ = 9,3267751 | XI = + 0,2122 | XI' = + 0,0066 |
| | + 0,2054 | + 0,1640 |

| | Pro ferie P. | Pro ferie P'. |
|---|---|---|
| $l$ XI = 9,3267751 | XI = + 0,2122 | XI' = + 0,0066 |
| 2,3010300 | + 0,2054 | + 0,1640 |
| 1,6278051 | | |
| 3,0637814 | | |
| $l$ XII = 8,5640237 | XII = − 0,0366 | XII' = − 0,0010 |
| 2,3010300 | + 0,1688 | + 0,1630 |
| 0,8650537 | | |
| 3,1370931 | | |
| $l$ XIII = 7,7279606 | XIII = + 0,0053 | XIII' = + 0,0001 |
| 2,3010300 | + 0,1741 | + 0,1631 |
| 0,0289906 | | |
| 3,2047065 | | |
| $l$ XIV = 6,8242841 | XIV = − 0,0007 | |
| | + 0,1734 | |

§. 36. Simili modo inftituatur calculus pro inueniendis valoribus Q et Q', quippe qui, in vfum vocando formulas §. 33. exhibitas, ita fe habebit:

| | Pro ferie Q. | Pro ferie Q'. |
|---|---|---|
| $l t$ = 2,3010300 | | |
| 0,7781513 | | |
| $l$ I = 1,5228787 | I = + 33,3333 | I' = + 8,3333 |
| 2,3010300 | | |
| 3,8259087 | | |
| 1,6020600 | | |
| $l$ II = 2,2218487 | II = − 166,6667 | II' = − 23,8095 |
| | − 133,3334 | − 15,4762 |

$l$ II =

| | Pro ferie Q. | Pro ferie Q'. |
|---|---|---|
| $l$II = 2,2218487 | II = − 166,6667 | II' = − 23,8095 |
| 2,3010300 | − 133,3334 | − 15,4762 |
| 4,5228787 | | |
| 1,9242793 | | |
| $l$III = 2,5985994 | III = + 396,8254 | III' = + 39,6825 |
| 2,3010300 | + 263,4920 | + 24,2063 |
| 4,8996294 | | |
| 2,1663314 | | |
| $l$IV = 2,7332980 | IV = − 541,1255 | IV' = − 41,6250 |
| 2,3010300 | − 277,6335 | − 17,4187 |
| 5,0343280 | | |
| 2,3569815 | | |
| $l$V = 2,6773465 | V = + 475,7147 | V' = + 29,7322 |
| 2,3010300 | + 198,0812 | + 12,3135 |
| 4,9783765 | | |
| 2,5137501 | | |
| $l$VI = 2,4646264 | VI = − 291,4918 | VI' = − 15,3417 |
| 2,3010300 | − 93,4106 | − 3,0282 |
| 4,7656564 | | |
| 2,6467304 | | |
| $l$VII = 2,1189260 | VII = + 131,5001 | VII' = + 5,9773 |
| 2,3010300 | + 38,0895 | + 2,9491 |
| 4,4199560 | | |
| 2,7621424 | | |
| $l$VIII = 1,6578136 | VIII = − 45,4793 | VIII' = − 1,8192 |
| | − 7,3898 | + 1,1299 |

| | Pro serie Q. | Pro serie Q'. |
|---|---|---|
| $l$ VIII = 1,6578136 | VIII = − 45,4793 | VIII' = − 1,8192 |
| 2,3010300 | − 7,3898 | + 1,1299 |
| 3,9588436 | | |
| 2,8640659 | | |
| $l$ IX = 1,0947777 | IX = + 12,4388 | IX' = + 0,4442 |
| 2,3010300 | + 5,0490 | + 1,5741 |
| 3,3958077 | | |
| 2,9553135 | | |
| $l$ X = 0,4404942 | X = − 2,7574 | X' = − 0,0889 |
| 2,3010300 | + 2,2916 | + 1,4852 |
| 2,7415242 | | |
| 3,0379043 | | |
| $l$ XI = 9,7036199 | XI = + 0,5054 | XI' = + 0,0149 |
| 2,3010300 | + 2,7970 | + 1,5001 |
| 2,0046499 | | |
| 3,1133355 | | |
| $l$ XII = 8,8913144 | XII = − 0,0779 | XII' = − 0,0021 |
| 2,3010300 | + 2,7191 | + 1,4980 |
| 1,1923444 | | |
| 3,1727474 | | |
| $l$ XIII = 8,0195970 | XIII = + 0,0105 | XIII' = + 0,0000 |
| 2,3010300 | + 2,7296 | + 1,4980 |
| 0,3206270 | | |
| 3,2470286 | | |
| $l$ XIV = 7,0735984 | XIV = − 0,0012 | |
| | + 2,7284 | |

§. 37.

§. 37. Inuentis igitur quatuor his valoribus:

$P = + 0,1734$; $Q = + 2,7284$

$P' = + 0,1631$; $Q' = + 1,4980$

colligimus inde ista producta:

$P(1 + Q') = 0,4331$

$QP' \quad = 0,4450$

quorum posterius primum tantum superat particula $= 0,0119$, quae differentia cum iam sit vehementer parua, et negatiua, nobis iam manifesto declarat, valorem assumtum $t = 200$ vix a valore vero discrepare, eumque aliquantillum superare, vnde superfluum foret accuratius in istum valorem inquirere: eius enim radix cubica tantum in computum ingreditur, quae a notabiliori errore litterae $t$ vix sensibilem errorem gigneret. Hoc igitur numero $t$ inuento, quem tamen tantillo minorem accipere conueniet, problema principale, quod hic nobis est propositum, perfecte resoluere poterimus.

## Problema.

§. 38. *Pro omnibus columnis cylindricis assignare maximam altitudinem, quam sustinere valent, antequam sub proprio pondere corruant.*

## Solutio.

Praesto sit columella, pariter cylindrica, ex eadem materia parata atque ipsae columnae, de quibus quaestio formatur; sit istius columellae altitudo $= a$ eiusque amplitudo $= dd$, atque per experimenta exploretur maximum onus, quod ista columella sine periculo fractionis sustinere valet

valet, cuius pondus repertum sit se habere ad proprium pondus columellae vt $\lambda : 1$, ita vt iam $\lambda$ sit numerus cognitus, quo inuento ponamus quaestionem institui circa columnam ex eadem materia confectam, cuius amplitudo sit $= bb$, atque supra ostendimus maximam altitudinem quaesitam esse $b = a \sqrt[3]{\frac{\lambda bb}{\pi\pi dd}} . t$. Sumto iam $t = 200$ erit $l \frac{t}{\pi\pi} = 1,3067302$, hincque $\frac{1}{3} l \frac{t}{\pi\pi} = 0,4355767$, cui respondet numerus $2,7263$, qui cum aliquantillum diminui debeat, eius loco scribamus numerum $e$, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, quippe qui est $2,71828$, ita vt iam maxima altitudo quaesita sit $b = 2,71828 . a \sqrt[3]{\frac{\lambda bb}{dd}}$, vel adeo in numeris rotundioribus statui poterit $b = 2,70 \sqrt[3]{\frac{\lambda bb}{dd}}$.

§. 39. Cum igitur antehac in determinatione oneris, quod quaeuis columna gestare valet, nullam proprii ponderis rationem tenuissem, regula etiam, quam inde deduxeram, quadam leui correctione indigebit, quae autem tam erit exigua, vt in praxi tuto negligi queat. Ad quod ostendendum columnam hic inuentam, quae sub proprio pondere occumbit, iuxta regulam ante datam examinemus, qua onera inuenta sunt tenere rationem dupplicatam compositam ex directa amplitudinum seu basium et reciproca altitudinum. Hinc cum columellae pro modulo assumtae altitudo esset $= a$, amplitudo siue area baseos $= dd$ et onus gestatum $= \lambda a dd$, ipsius autem columnae inuentae amplitudo $= bb$, altitudo vero $b = a \sqrt[3]{\frac{\lambda bbt}{\pi\pi dd}}$, ponamus onus, quod haec columna iuxta regulam gestare posset $= \xi bbb$; vbi $bbb$ exhibet ipsum huius columnae pondus.

dus. His positis, secundum nostram regulam esse deberet $\lambda a d d : \xi b b b = \frac{d^4}{a a} : \frac{b^4}{b b}$, vnde deducitur $\xi = \frac{\lambda a^3 b b}{b^3 d d}$, et loco $b^3$ substituto suo valore erit $\xi = \frac{\pi \pi}{f\,2}$, hoc est circiter $\xi = \frac{1}{20}$; scilicet iuxta regulam haec columna sustineret partem vigesimam proprii ponderis, dum reuera sub proprio pondere succumbit.

§. 40. Vicissim ergo, quoties ista regula declarat, columnam quampiam tantum vigesimam proprii ponderis partem sustinere posse, tum concludere debemus, eam nullum plane onus gestare posse, sed sub proprio pondere occumbere. Cum igitur nullae vnquam columnae adhiberi soleant, nisi quae onera multo grauiora sustentare valeant, manifestum est, errorem illius regulae nullius plane esse momenti, atque in praxi tuto negligi posse, perinde ac si proprium pondus nihil plane conferret, ad vim columnarum diminuendam, quemadmodum in prima de hoc argumento dissertatione est assertum.

# VARIA PROBLEMATA CIRCA STATVM AEQVILIBRII TRABIVM COMPACTILIVM ONERATARVM, EARVMQVE VIRES ET PRESSIONEM CONTRA ANTERIDES.

Auctore

*NICOLAO FVSS.*

## Problema I.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. *Si duae trabes AC et BC, plano horizontali in A et B insistentes, in C contra se inuicem innitantur et ab incumbente pondere P deorsum premantur, definire vires, quibus trabes in A et B retineri debent, tum vero etiam vires quas vtraque trabs sustinet.*

## Solutio.

Sit trabium longitudo $AC = a$ et $BC = b$, interuallum vero $AB = c$ et pondus deorsum premens $= P$, quas quantitates constanter vt cognitas spectare licet. Statuantur porro anguli, sub quibus trabes ad horizontem incli-

clinantur B A C $= \alpha$ et A B C $= \beta$, eritque angulus A C B $= 180° - \alpha - \beta$, anguli vero (demisso ex C perpendiculo C O P) A C O $= 90° - \alpha$ et B C O $= 90° - \beta$. At ex elementis constat, angulos inclinationis $\alpha$ et $\beta$ ita per quantitates $a$, $b$, $c$, definiri, vt sit

$$\text{cos.}\,\alpha = \frac{cc + aa - bb}{2ac} \text{ et } \text{cos.}\,\beta = \frac{cc + bb - aa}{2bc}.$$

Resoluatur iam vis deorsum vrgens P secundum directiones C A et C B. Hunc in finem repraesentet perpendiculum C P ipsum pondus P, ducanturque rectae P $a$ et P $b$, ipsis B C et A C parallelae, eritque Tab. V. Fig. 4.

$$CP : Ca = P : \text{vim sec. } CA.$$
$$CP : Cb = P : \text{vim sec. } CB.$$

Cum igitur ex parallelogrammo C $a$ P $b$ sit

$$CP : Ca = \text{sin. } CaP : \text{sin } CPa \text{ et}$$
$$CP : Cb = \text{sin. } CaP : \text{sin. } CPb, \text{ erit}$$
$$\text{Vis secundum } CA = \frac{P\,\text{sin. } CPa}{\text{sin. } CaP} \text{ et}$$
$$\text{Vis secundum } CB = \frac{P\,\text{sin. } CPb}{\text{sin. } CaP}.$$

Manifestum autem est, angulum C P$a$ aequalem esse eius alterno B C O $= 90° - \beta$, et angulum C $a$ P anguli A C B complemento aequalem, hoc est $= \alpha + \beta$, similique modo erit C P$b$ $=$ A C O $= 90° - \alpha$, quibus introductis fiet

$$\text{Vis secundum } CA = \frac{P\,\text{cos.}\,\beta}{\text{sin.}\,(\alpha + \beta)}$$
$$\text{Vis secundum } CB = \frac{P\,\text{cos.}\,\alpha}{\text{sin.}\,(\alpha + \beta)}$$

atque hae binae vires idem praestabunt ac sola vis C P $=$ P, in cuius effectum inquirendi nobis est propositum.

Quoniam igitur trabs C A basin vrget in directione A $a$ vi $= \frac{P\,\text{cos.}\,\beta}{\text{sin.}\,(\alpha + \beta)}$, si eam denuo resoluamus, secundum directio- Fig. 5.

 nes

nes A $f$ et A $g$, in duas alias vires, orietur

Pro directione horizontali A $f$ vis $= \frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$ et,

Pro directione verticali A $g$ vis $= \frac{P \sin. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$.

Pro altera vero trabe, basin in directione B $\beta$ vrgente, vi $= \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}$, eam secundum directiones B $f'$ et B $g'$ in duas alias resoluendo, obtinetur

Pro directione horizontali B $f'$ vis $= \frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$;

Pro directione verticali B $g'$ vis $= \frac{P \cos. \alpha \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$.

## Corollarium I.

§. 2. Ex hac solutione patet, vires horizontales, non obstante differentia trabium esse aequales vtrinque; ambas vero vires verticales, iunctim sumtas, aequari ponderi P, vti requiritur. Tum vero, posita trabium longitudine aequali, hoc est $a = b$, fiet $\alpha = \beta$, et vires tam horizontales quam verticales erunt vtrinque aequales; illae scilicet $= \frac{1}{2}$ P cot. $\alpha$, hae vero $= \frac{1}{2}$ P. At casu $\alpha = \beta = 45°$ erit vtrinque vis horizontalis $=$ vi verticali $= \frac{1}{2}$ P.

## Corollarium II.

§. 3. Quia trabes altera A C comprimitur secundum suam longitudinem vi $= \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$, altera vero B C vi $= \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}$: euidens est, trabem minori angulo oppositam maiorem vim sustinere, contra vero, trabem maiori angulo oppositam minorem. Positis autem angulis inclinationis aequalibus, vis compressiua vtrinque est eadem $= \frac{P}{2 \sin. \alpha}$.

Scho-

## Scholion.

§. 4. Hinc etiam definiri poterit craſſities, vtrique trabi ad has vires ſuſtentandas neceſſaria, ex iis, quae ſummus *Eulerus*, de vi columnarum agens, non ita pridem cum Academia communicauit; vbi ſcilicet oſtendit: *Vim, quam columna ſuſtinere valet, eſſe vt quadratum craſſitiei directe et vt quadratum longitudinis inuerſe.* Si enim columna, ex eadem, qua trabes, materia confecta, longitudinis $= A$ et craſſitiei $= CC$, ſuſtinere valeat onus $= O$ erit vi memorati Theorematis $O = \frac{C^4}{A^2}$. Spectato igitur hoc onere $O$ vt cognito, quoniam trabis alterius $AC$ longitudo poſita eſt $= a$, ſi eius craſſities deſignetur per $ff$, ob vim eam comprimentem $= \frac{P \operatorname{coſ.} \beta}{\operatorname{ſin.}(\alpha + \beta)}$ habebitur haec proportio: $O : \frac{C^4}{A^2} = \frac{P \operatorname{coſ.} \beta}{\operatorname{ſin.}(\alpha + \beta)} : \frac{f^4}{aa}$, vnde deducitur craſſities trabis $AC$, ſcil. $ff = \frac{aCC}{A} \sqrt{\frac{P \operatorname{coſ.} \beta}{O \operatorname{ſin.}(\alpha + \beta)}}$. Similique modo reperietur craſſities $gg$ trabis alterius $BC$, ſcil.

$$gg = \frac{bCC}{A} \sqrt{\frac{P \operatorname{coſ.} \alpha}{O \operatorname{ſin.}(\alpha + \beta)}}.$$

## Problema II.

§. 5. *Si compages ex tribus trabibus $AB$, $BC$, $CD$ compoſita punctis fixis $A$ et $D$ inſiſtat, atque in punctis $B$ et $C$ grauata fuerit ponderibus $P$ et $Q$, inuenire ſitum, in quo haec compages erit in aequilibrio; tum vero vires, quas ſingulae trabes ſuſtinebunt, vna cum preſſione contra terminos fixos ſiue anterides $A$ et $B$.* Tab. V. Fig. 4.

## Solutio.

Vocentur trabium longitudines $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, ductiſque ex $B$ et $C$ rectis horizontalibus $Bb$

 et

et $C c$ sint inclinationes ad horizontem, seu anguli

$$BAa = \alpha,\ CBb = \beta,\ DCc = -\gamma.$$

His positis erunt interualla

$$Aa = a \cos.\alpha;\ Bb = b \cos.\beta;\ Cc = c \cos.\gamma,$$

et altitudines, seu perpendicula ex iuncturis demissa

$$Ba = a \sin.\alpha;\ Cb = b \sin.\beta;\ Dc = -c \sin.\gamma.$$

Iam cum puncta A et D sint data, ducatur verticalis DM, voceturque distantia $AM = m$ et altitudo $MD = n$, atque manifestum est fore

$$m = a \cos.\alpha + b \cos.\beta + c \cos.\gamma \text{ et}$$
$$n = a \sin.\alpha + b \sin.\beta + c \sin.\gamma$$

atque ex his duabus aequationibus, in quibus tam longitudines trabium $a$, $b$, $c$, quam interualla $m$ et $n$ sunt cognita, trium angulorum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, duo determinantur: tertius vero, ex conditione aequilibrii definiendus, adhuc manet indefinitus.

Tab. V. Fig. 5. Resoluatur nunc vis deorsum vrgens $BP = P$ secundum directiones longitudinales trabium BA et BC; hunc in finem faciatur Parallelogrammum $Pa' Bc'$, ex quo colligitur: $BP : Ba' = P :$ vim sec. BA

et $BP : Bc' = P :$ vim sec. BC.

Est vero

$$BP : Ba' = \sin.Ba'P : \sin.BPa' = \sin.ABC : \sin.aBC$$
$$BP : Bc' = \sin.Ba'P : \sin.BPc' = \sin.ABC : \sin.aBA$$

Fig. 4. vnde per angulos ad priorem figuram relatos erit

$P :$ vim sec. $BA = \sin.ABC : \sin.aBC$

$P :$ vim sec. $BC = \sin.ABC : \sin.aBA$,

ex

ex quibus analogiis nanciſcimur

vim ſecundum $BA = \frac{P \, \text{ſin.} \, aBC}{\text{ſin.} \, ABC}$

vim ſecundum $BC = \frac{P \, \text{ſin.} \, aBA}{\text{ſin.} \, ABC}$.

Eſt vero angulus $ABC = 180^\circ - \alpha + \beta$, angulus

$aBC = 90^\circ + \beta$ et $aBA = 90^\circ - \alpha$,

quibus introductis fiet

vis ſecundem $BA = \frac{P \, \text{coſ.} \, \beta}{\text{ſin.} \, (\alpha - \beta)}$ et

vis ſecundum $BC = \frac{P \, \text{coſ.} \, \alpha}{\text{ſin.} \, (\alpha - \beta)}$.

Quod ſi iam ſimili modo pondus alterum deorſum vrgens $CQ = Q$ ſecundum directiones trabium $CB$ et $CD$ reſoluatur, ex praecedentibus manifeſtum eſt, ambas vires, ponderi $Q$ aequiualentes, ſequenti modo expreſſas haberi:

Vis ſecundum $CB = \frac{Q \, \text{ſin.} \, bCD}{\text{ſin.} \, BCD}$,

Vis ſecundum $CD = \frac{Q \, \text{ſin.} \, bCB}{\text{ſin.} \, BCD}$,

quae autem expreſſiones, ob angulos

$BCD = 180^\circ - \beta + \gamma$; $bCD = 90^\circ + \gamma$ et

$bCB = 90^\circ - \beta$,

hanc induent formam:

Vis ſecundum $CB = \frac{Q \, \text{coſ.} \, \gamma}{\text{ſin.} \, (\beta - \gamma)}$,

Vis ſecundum $CD = \frac{Q \, \text{coſ.} \, \beta}{\text{ſin.} \, (\beta - \gamma)}$.

His inuentis notetur primo aequilibrium ſubſiſtere non poſſe, niſi vires, ſecundum directiones ſibi contrarias $BC$ et $CB$ agentes, ſint inter ſe aequales, hoc eſt, niſi fuerit

$$\frac{P \, \text{coſ.} \, \alpha}{\text{ſin.} \, (\alpha - \beta)} = \frac{Q \, \text{coſ.} \, \gamma}{\text{ſin.} \, (\beta - \gamma)}.$$

En igitur nacti ſumus tertiam aequationem, duabus prioribus

bus iungendam, ex quibus ſtatus aequilibrii, ſiue terni anguli inclinationis $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, perfecte determinantur, cum fieri debeat.

I°. $m = a \cos. \alpha + b \cos. \beta + c \cos. \gamma$

II°. $n = a \sin. \alpha + b \sin. \beta + c \sin. \gamma$,

III°. $\frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)}$.

Poſtquam autem hi anguli rite fuerint determinati, videndum eſt, quantas vires termini fixi, ſeu fulcimenta A et D ſuſtinere debent. Ac primo quidem, cum inuenerimus vim ſecundum B A, baſin in directione A $\alpha$ vrgentem $= \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)}$, reſoluatur ea in duas alias vires, ſecundum directiones A $p$ et A $q$ agentes, eritque

Vis horizontalis A $p = \frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)}$.

Vis verticalis A $q = \frac{P \sin. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)}$.

Eodem modo ſi vis altera C D $= \frac{Q \cos. \beta}{\sin. (\beta - \gamma)}$, baſeos terminum D in directione D $\delta$ vrgens, reſoluatur ſecundum directiones D $r$ et D $s$, orietur

Vis horizontalis D $r = \frac{Q \cos. \beta \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)}$,

Vis verticalis D $s = -\frac{Q \cos. \beta \sin. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)}$.

## Corollarium I.

§. 6. Ex natura aequilibrii ſupra deduximus hanc aequationem:

$$\frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)},$$

quae

quae, si vtrinque multiplicetur per cof. $\beta$, abit in sequentem:

$$\frac{P\ cof.\ \alpha\ cof.\ \beta}{fin.\ (\alpha-\beta)} = \frac{Q\ cof.\ \beta\ cof.\ \gamma}{fin.\ (\beta-\gamma)}.$$

Cum igitur huius aequationis pars dextra exhibeat vim horizontalem secundum D $r$, sinistra vero vim horizontalem secundum A $p$, manifestum est, vires horizontales itidem, non obstante differentia trabium, inter se esse aequales, vti in Problemate primo, pro casu duarum trabium, obseruauimus.

## Corollarium II.

§. 7. Hic autem altera proprietas, supra in Problemate primo obseruata, quod vires verticales aequentur ponderibus grauantibus, non tam facile perspicitur; verum sequenti modo haec proprietas pro hoc casu demonstrari potest. Cum sit summa virium verticalium

$$A\ q + D\ s = \frac{P\ fin.\ \alpha\ cof.\ \beta}{fin.\ (\alpha-\beta)} - \frac{Q\ cof.\ \beta\ fin.\ \gamma}{fin.\ (\beta-\gamma)},$$

resumatur aequatio ex natura aequilibrii deducta

$$\frac{P\ cof.\ \alpha}{fin.\ (\alpha-\beta)} - \frac{Q\ cof.\ \gamma}{fin.\ (\beta-\gamma)} = 0,$$

quae, si ducatur in fin. $\beta$ et subtrahatur a priori, summae ponderum P + Q aequanda, relinquit hanc aequationem:

$$\frac{P\ (fin.\ \alpha\ cof.\ \beta - cof.\ \alpha\ fin.\ \beta)}{fin.\ (\alpha-\beta)} - \frac{Q\ cof.\ \beta\ fin.\ \gamma - cof.\ \gamma\ fin.\ \beta)}{fin.\ (\beta-\gamma)} = P + Q,$$

quae manifesto est identica.

## Corollarium III.

§. 8. Sumatur $\alpha = -\gamma = 90°$ et $\beta = 0$, ita vt tota compages consistat ex duabus trabibus verticalibus AB Tab. V. Fig. 6.

A B et C D, horizontali B C iunctis, eruntque vires horizontales $Ap$ et $Dr = 0$, verticales vero $Aq = P$ et $Ds = Q$, vti rei natura postulat. Sin autem solus angulus $\beta$ fuerit $= 0$, ita vt media trabs B C in directione horizonti parallela binis reliquis A B et C D, vtcunque inclinatis, insistat, erunt vires

Tab. V. Fig. 7.

$$Ap = \frac{P \cos. \alpha}{\sin. \alpha};\ Aq = P;\ Dr = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. \gamma} \text{ et } Ds = Q.$$

Casu igitur $\alpha = -\gamma = 45°$ fiet, vti requiritur,

$$Ap = Aq = P \text{ et } Dr = Ds = Q.$$

## Scholion I.

§. 9. Quod si vim horizontalem, quam compages in vtroque termino exerit, littera V designemus, eamque tanquam cognitam spectemus, inde definire poterimus onera grauantia P et Q. Cum enim hoc modo sit

$$\frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)} = V \text{ et } \frac{Q \cos. \beta \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)} = V,$$

colligimus

$$P = \frac{V \sin. (\alpha - \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta} \text{ et } Q = \frac{V \sin. (\beta - \gamma)}{\cos. \beta \cos. \gamma}.$$

Tum vero erit vis, qua trabes A B secundum suam longitudinem comprimitur $= \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{V}{\cos. \alpha}$; similique modo vis, qua trabes B C comprimitur

$$= \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)} = \frac{V}{\cos. \beta};$$

denique vis, qua trabes C D sollicitatur, quae erat

$$= \frac{Q \cos. \beta}{\sin. (\beta - \gamma)} = \frac{V}{\cos. \gamma}.$$

Vnde patet, has vires esse reciproce vt cosinus, siue directe vt secantes inclinationum.

Scholi-

## Scholion II.

§. 10. Ex his autem viribus, vt supra §. 4. crassities cuiusque trabis determinari potest. Sit enim A longitudo et $CC$ crassities columnae ligneae, oneri O sustentando paris, et posita crassitie trabis $AB = ff$, trabis $BC = gg$ trabisque $CD = hh$, ob analogiam theorematis *Euleriani*,

$$O : \frac{C^4}{A^2} = \frac{V}{cos.\,\alpha} : \frac{f^4}{aa} = \frac{V}{cos.\,\beta} : \frac{g^4}{bb} = \frac{V}{cos.\,\gamma} : \frac{h^4}{cc},$$ erit

Pro trabe AB crassities $ff = \frac{aCC}{A} \sqrt{\frac{V}{O\,cos.\,\alpha}}$,

- - - BC - - $gg = \frac{bCC}{A} \sqrt{\frac{V}{O\,cos.\,\beta}}$,

- - - CD - - $hh = \frac{cCC}{A} \sqrt{\frac{V}{O\,cos.\,\gamma}}$.

## Scholion III.

§. 11. Ceterum notetur, formulas pro ponderibus grauantibus P et Q etiam sequenti modo exprimi posse:

$$P = \frac{V\,(sin.\,\alpha\;cos.\,\beta - cos.\,\alpha\;sin.\,\beta)}{cos.\,\alpha\;cos.\,\beta} = V\;(tang.\,\alpha - tang.\,\beta)$$

$$Q = \frac{V\,(sin.\,\beta\;cos.\,\gamma - cos.\,\beta\;sin.\,\gamma)}{cos.\,\beta\;cos.\,\gamma} = V\;(tang.\,\beta - tang.\,\gamma).$$

Hinc si ambo pondera P et Q fuerint inter se aequalia, erit $tang.\,\alpha - tang.\,\beta = tang.\,\beta - tang.\,\gamma$; vnde patet, tangentes inclinationum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, constituere progressionem arithmeticam.

## Scholion IV.

§. 12. Quod si insuper trabium longitudines $a$, $b$, $c$, statuantur inter se aequales, ternae aequationes angulos

gulos inclinatorios definientes, ſequentem induent formam:

I. $\frac{m}{a} = \text{cof.}\,\alpha + \text{cof.}\,\beta + \text{cof.}\,\gamma$.

II. $\frac{n}{a} = \text{fin.}\,\alpha + \text{fin.}\,\beta + \text{fin.}\,\gamma$.

III. $0 = \text{tang.}\,\alpha - 2\,\text{tang.}\,\beta + \text{tang.}\,\gamma$.

Hinc ſi fuerit altitudo $MD = n = 0$, erit

II. $0 = \text{fin.}\,\alpha + \text{fin.}\,\beta + \text{fin.}\,\gamma$,

cui aequationi, pariter ac tertiae, ſatisfit ſumendo $\beta = 0$ et $\gamma = -\alpha$; ex prima autem definitur angulus $\alpha$, cum ſit $\text{cof.}\,\alpha = \frac{m-a}{2a}$.

## Problema III.

Tab. V. Fig. 8.

§. 13. *Si compages ex quotcunque trabibus confecta in punctis fixis* A *et* E *inſiſtat, iuncturae autem* B, C, D, etc. *grauentur ponderibus* P, Q, R, etc. *inuenire ſtatum aequilibrii, in quem haec compages ſe componet, dein vires, quas in anterides in* A *et* E *exerit, ac tertio vires, quas ſingula trabes ſuſtinere debet.*

## Solutio.

Sit longitudo trabis $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, etc. ductisque rectis horizonti parallelis $Bb$, $Cc$, $Dd$, etc. vocentur inclinationes ad horizontem

$BAa = \alpha$; $CBb = \beta$; $DCc = -\gamma$; $EDd = -\delta$; etc.

eruntque hinc interualla

$Aa = a\,\text{cof.}\,\alpha$; $Bb = b\,\text{cof.}\,\beta$; $Cc = c\,\text{cof.}\,\gamma$; $Dd = d\,\text{cof.}\,\delta$; etc.

et

et perpendicula ex iuncturis demissa

$Ba = a$ sin. $\alpha$; $Cb = b$ sin. $\beta$; $Dc = -c$ sin. $\gamma$; $Ed = -d$ sin. $\delta$; etc.

Vnde si fuerit distantia $AM = m$, et eleuatio alterius termini $ME = n$, habebimus statim has aequationes pro determinatione inclinationum:

$$\text{I.}\quad m = a \cos.\alpha + b\cos.\beta + c\cos.\gamma + d\cos.\delta + \text{etc.}$$

$$\text{II.}\quad n = a \sin.\alpha + b\sin.\beta + c\sin.\gamma + d\sin.\delta + \text{etc.}$$

Denotet iam V vim horizontalem, quam compages in vtroque termino A et E exerit, atque ex solutione Problematis praecedentis manifestum est, fore

$$V = \frac{P \cos.\alpha \cos.\beta}{\sin.(\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos.\beta \cos.\gamma}{\sin.(\beta - \gamma)} = \frac{R \cos.\gamma \cos.\delta}{\sin.(\gamma - \delta)} \text{ etc.}$$

siue, pressione horizontali contra anterides vt cognita spectata, fient pondera

$$P = \frac{V \sin.(\alpha - \beta)}{\cos.\alpha \cos.\beta};\ Q = \frac{V \sin.(\beta - \gamma)}{\cos.\beta \cos.\gamma};\ R = \frac{V \sin.(\gamma - \delta)}{\cos.\gamma \cos.\delta};\ \text{etc.}$$

atque ex his aequationibus, cum binis prioribus coniunctis, inclinationes, seu status aequilibrii determinari debet.

Circa vires, quibus singula trabs secundum suam longitudinem comprimitur, consultetur etiam solutio praecedentis Problematis, ac inuenientur:

Vis trabem AB comprimens $= \frac{V}{\cos.\alpha}$

- - BC - - $= \frac{V}{\cos.\beta}$

- - CD - - $= \frac{V}{\cos.\gamma}$

etc.

Supra enim iam obseruauimus, has vires esse inter se inuerse vt cosinus siue directe vt secantes inclinationum.

 Scholi-

## Scholion I.

§. 14. Cum igitur prima trabes AB terminum A vrgeat vi $= \frac{V}{cos. \alpha}$, inde oritur

Vis horizontalis $= V$ et

Vis verticalis $= V \text{ tang. } \alpha$.

Simili modo pro altero termino E (considerando tantisper casum determinatum quatuor trabium) vis sollicitans est $= \frac{V}{cos. \delta}$, quae resoluta dat

Vim horizontalem $= V$ et

Vim verticalem $= - V \text{ tang. } \delta$.

Vnde patet vires horizontales iterum esse inter se aequales. Vires autem verticales iunctim sumtae summae ponderum aequales esse debent, hoc est

$$V (\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \delta) = P + Q + R.$$

Cum autem sit

$$P = \frac{V \sin. (\alpha - \beta)}{cos. \alpha \, cos. \beta} = V (\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \beta)$$

$$Q = \frac{V \sin. (\beta - \gamma)}{cos. \beta \, cos. \gamma} = V (\text{tang. } \beta - \text{tang. } \gamma)$$

$$R = \frac{V \sin. (\gamma - \delta)}{cos. \gamma \, cos. \delta} = V (\text{tang. } \gamma - \text{tang. } \delta)$$

erit reuera

$$P + Q + R = V (\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \delta).$$

## Scholion II.

§. 15. Si igitur dentur longitudines trabium $a, b, c, d$, et interualla $AM = m$ et $ME = n$, vna cum ponderibus

deribus grauantibus P, Q, R, tot inde eruuntur aequationes, quot requiruntur, tam ad ſingulas inclinationes, quam ad vim horizontalem V, definiendas. Ita in figura 8, pro caſu quatuor trabium, quinque adſunt incognitae, ſcil. anguli inclinationis $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ vna cum vi V, totidemque aequationes, quae autem ita ſunt comparatae, vt nullo modo reſolui queant, propter plures formulas maxime irrationales. Quod ſi enim ſtatuere velimus tang. $\alpha = t$, erit

$$\text{ſin.}\,\alpha = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}} \text{ et } \text{coſ.}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}:$$

Deinde vero cum ſit

$$\frac{V}{P} = t - \text{tang.}\,\beta, \text{ erit tang.}\,\beta = t - \frac{V}{P},$$

eodemque modo colligitur

$$\text{tang.}\,\gamma = t - \frac{V}{P} - \frac{V}{Q};\ \text{tang.}\,\delta = t - \frac{V}{P} - \frac{V}{Q} - \frac{V}{R}.$$

Quare ſi breuitatis gratia ponatur

$$\text{tang.}\,\beta = t - fV;\ \text{tang.}\,\gamma = t - gV;\ \text{tang.}\,\delta = t - bV$$

exiſtente

$$f = \frac{1}{P};\ g = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q};\ b = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R},$$

ita vt tantum duae adſint incognitae $t$ et V, erit

$$\text{ſin.}\,\beta = \frac{t-fV}{\sqrt{1+(t-fV)^2}};\ \text{coſ.}\,\beta = \frac{1}{\sqrt{1+(t-fV)^2}};$$

$$\text{ſin.}\,\gamma = \frac{t-gV}{\sqrt{1+(t-gV)^2}};\ \text{coſ.}\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(t-gV)^2}};$$

$$\text{ſin.}\,\delta = \frac{t-bV}{\sqrt{1+(t-bV)^2}};\ \text{coſ.}\,\delta = \frac{1}{\sqrt{1+(t-bV)^2}};$$

qui valores ſi in duabus prioribus aequationibus, pro diſtantia AM $= m$ et altitudine ME $= n$ inuentis, ſubſtituantur, orientur hae duae aequationes:

$m =$

$$m = \frac{a}{\sqrt{1+tt}} + \frac{b}{\sqrt{1+(t-fV)^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+(t-gV)^2}} + \frac{d}{\sqrt{1+(t-hV)^2}};$$

$$n = \frac{at}{\sqrt{1+tt}} + \frac{b(t-fV)}{\sqrt{1+(t-fV)^2}} + \frac{c(t-gV)}{\sqrt{1+(t-gV)^2}} + \frac{d(t-hV)}{\sqrt{1+(t-hV)^2}};$$

quae autem ita ſunt comparatae, vt facile intelligatur, nullam dari viam, hinc binas incognitas $t$ et V eruendi.

## Scholion III.

§. 16. Sin autem quaeſtio inuertatur, ita vt praeter ſingularum trabium longitudinem $a$, $b$, $c$, $d$, etiam dentur inclinationes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, atque inſuper vis illa horizontalis V, qua anterides in A et E vrgentur, inde facile definiri poterunt pondera grauantia P, Q, R, vna cum interuallis $m$ et $n$. Erit enim in genere:

$$m = a\,\text{coſ.}\,\alpha + b\,\text{coſ.}\,\beta + c\,\text{coſ}\,\gamma + d\,\text{coſ.}\,\delta + \text{etc.}$$
$$n = a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}\,\beta + c\,\text{ſin.}\,\gamma + d\,\text{ſin.}\,\delta + \text{etc.}$$

ipſa vero pondera grauantia erunt

$$P = V\,(\text{tang.}\,\alpha - \text{tang.}\,\beta)$$
$$Q = V\,(\text{tang.}\,\beta - \text{tang.}\,\gamma)$$
$$R = V\,(\text{tang.}\,\gamma - \text{tang.}\,\delta)$$
etc.

Haecque ſolutio inſignem vſum haberi poterit in experimentis, quae ſuper talibus trabibus compactilibus inſtituuntur.

## Problema IV.

§. 17. *Si numerus trabium hoc modo iunctarum fuerit infinitus, trabium autem longitudines vt et pondus, quod ſin-*

*ſingula trabecula ſuſtinet, infinite paruae, inuenire curuam, ad quam iſtae trabeculae ſe component, dum in aequilibro ſubſiſtunt.*

## Solutio.

Sit $AYy$ curua, quam iſta compages accipiat, dum in aequilibrium ſe componit, atque in axe horizontali $AM$ vocetur abſciſſa $AX = x$ et applicata $XY = y$, ipſe vero curuae arcus $AY = s$. Iam conſideretur curuae elementum quodcunque $Yy = ds$, vnamquamque compagis trabeculam repraeſentans; atque pro hoc elemento (demiſſa ex puncto $y$ applicata proxima $yx$, ductaque recta $Yu$ axi parallela) erit interuallum $Xx = Yu = dx$ et $uy = dy$; tum vero elementum arcus $Yy = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, ſiue, poſito $dy = p\,dx$, erit $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$.

Tab. V. Fig. 9.

Vocetur nunc elementi $Yy$ ad horizontem inclinatio, ſiue angulus $yYu = \Phi$, erit tang. $\Phi = \frac{dy}{dx} = p$, ſequentis vero elementi inclinatio cum ſit $\Phi + d\Phi$, erit eius tangens $= p + dp$. Iam quia ponduſculum, quo hoc elementum grauatur, eſt infinite paruum, ponatur id. $= d\Pi$, et ob vim horizontalem, quam compages in termino $A$ exerit, conſtantem, ſit nobis nunc $K$, quod ſupra per $V$ deſignauimus.

His poſitis quaelibet aequationum ſuperioris Problematis, veluti $R = V\,(\text{tang.}\,\gamma - \text{tang.}\,\delta)$, huc transferri poterit. Erit enim vis horizontalis $V = K$, vis grauans $R = d\Pi$, inclinatio $\gamma = \Phi$ et $\delta = \Phi + d\Phi$, ideoque tang. $\gamma = p$ et tang. $\delta = p + dp$, quibus ſubſtitutis ſtatim colligitur iſta

 aequa-

aequatio: $d\Pi = -K\,dp$, quae aequatio eſt pro *Catenaria inuerſa*, vti ex ſequentibus clarius patebit. Nota enim eſt proprietas huius curuae, a celeberrimo *Ioanne Bernoulli* inuenta, quod ſit $dx$ ad $dy$ vt pondus catenae ad potentiam, grauantem. Spectata igitur vi fulcrum vrgente K vt effectum ponderis catenae, in ſenſum contrarium agentem, ſumma ponduſculorum grauantium exiſtente $= \Pi$, erit

$$dx : dy = -K : \Pi,$$

ex quo naſcitur aequatio $\Pi = -\frac{K\,dy}{dx} = -Kp$, vnde fit differentiando $d\Pi = -K\,dp$, quae eſt ea ipſa aequatio, quam noſtra ſolutio ſuppeditauit.

Statim igitur ac lex, qua grauationes in ſingula elementa agunt, fuerit cognita, ſpecies curuae, ſiue curuatura A Y accuratius definietur. Tres autem pro lege grauationis caſus principales locum habere poſſunt: 1°.) Si vires grauantes elemento abſciſſae fuerint proportionales, quo igitur caſu poni conueniet $d\Pi = \lambda\,dx$. 2°.) Si pondera fuerint in ratione elementorum arcus, hoc eſt $d\Pi = \lambda\,ds$. 3°.) Si fuerit $d\Pi = \lambda y\,dx$, ita vt onera ſint in ratione ſpatiorum; quibus inſuper quartus caſus adiungi poteſt, quo compages a fluido ſuperincumbente premitur, cuius altitudo ſuper horizontali A M ſi ponatur $= b$, elementum $Yy$ ſuſtinebit pondus columnae, cuius altitudo $= b - y$ et baſis $= dx$; tum igitur ponendum erit $d\Pi = (b - y)\,dx$. Hos ergo ſingulos caſus hoc loco ſucceſſiue percurramus.

## Euolutio caſus primi.

§. 18. Cum igitur hoc caſu ſit $d\Pi = \lambda\,dx = -K\,dp$, erit integrando $\lambda x = \text{conſt.} - Kp = C - Kp$, vnde fit $p =$

$p = \frac{C - \lambda x}{K}$. Statuatur $\frac{C}{K} = \alpha$ et $\frac{\lambda}{K} = \beta$, ita vt fit $p = \alpha - \beta x$, vnde multiplicando per $dx$ erit $p\,dx = dy = \alpha\,dx - \beta x\,dx$, ideoque integrando $y = \alpha x - \frac{1}{2}\beta x x$, vbi constantis additione non opus est, quia posito $x = 0$ sponte fit $y = 0$. Prodit autem etiam $y = 0$ casu quo $x = \frac{2\alpha}{\beta}$; ex quo manifestum est curuam quaesitam hoc casu primo esse *Parabolam*, ex altera parte I in horizontem cadentem, ad distantiam $AI = \frac{2\alpha}{\beta}$. Si igitur capiatur punctum medium O, erit abscissa $AO = \frac{\alpha}{\beta}$, et applicata media $OM = \frac{\alpha\alpha}{2\beta}$, quae erit axis Parabolae, cuius parameter est $\frac{AO^2}{OM} = \frac{2}{\beta}$.

## Euolutio casus secundi.

§. 19. Cum hic fit $d\Pi = \lambda\,ds = -K\,dp$ erit integrando $\lambda s = C - Kp$. Hic ergo arcus curuae assignatur, ex quo patet, eam fore rectificabilem. Quo autem aequationem inter coordinatas, obtineamus, loco $ds$ scribamus $dx\sqrt{1+pp}$, fietque

$$dx\sqrt{1+pp} = -\frac{K}{\lambda}dp = -a\,dp,$$

existente $a = \frac{K}{\lambda}$, vnde statim integrando prodiret:

$$x = -a\,l\,(p + \sqrt{1+pp}) + C.$$

At vero cum fit $dx = -\frac{a\,dp}{\sqrt{1+pp}}$, multiplicetur vtrinque per $p$, vt fiat

$$p\,dx = dy = -\frac{a\,p\,dp}{\sqrt{1+pp}};$$

eritque integrando $y = b - a\sqrt{1+pp}$, ex qua aequatione eruitur:

 $p =$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{((y-b)^2 - aa)}}{a},$$

vnde ista aequatio colligitur:

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(y-b)^2 - aa}},$$

quae est pro Specie *Catenariae inuersae*, vti mox clarius patebit.

Consideretur enim curuae punctum supremum M, vbi eius tangens horizonti sit parallela, capiaturque verticalis, siue applicata media O M, pro axe. Cum igitur elementi in M angulus inclinatorius sit $= 0$, erit etiam tangens $p = 0$, ideoque, ob $y = b - a\sqrt{1 + pp}$, fiet applicata media M O $= b - a$. Statuatur autem br. gr. M O $= f$ et A O $= g$, sumtisque super axe M O, abscissa M T $= t$ et applicata T Y $= u$, erit $x = g - u$ et $y = f - t$, atque $b = a + f$, vnde aequatio nostra supra inuenta, $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{((y-b)^2 - aa)}}$, hanc induet formam:

$$du = \frac{a\,dt}{\sqrt{((a+t)^2 - aa)}} \text{ siue } du = \frac{a\,dt}{\sqrt{(2at + tt)}},$$

quae est aequatio satis nota pro catenaria.

Pro rectificatione huius curuae notetur esse arcus

$$MY = \int \sqrt{dt^2\,du^2} = \int \frac{(a+t)\,dt}{\sqrt{(2at + tt)}},$$

vnde colligitur integrando M Y $= \sqrt{2at + tt}$. Ex hac euolutione patet, quamlibet huius curuae portionem talem compagem trabium exhibere posse, quoniam ambae literae $f$ et $g$, ex calculo excesserunt, per quas scilicet relatio inter coordinatas, ad ambos axes A O et M O relatas, exprimebatur.

Operae

Operae pretium erit naturam aequationis inter coordinatas $t$ et $u$ explorare et, quomodo altera per alteram transſcendenter exprimitur, ob oculos ponere. Hunc in finem reſumatur aequatio differentialis

$du = \frac{a\,dt}{\sqrt{(2at+tt)}}$; ex qua fit $u = a\int\frac{dt}{\sqrt{(2at+tt)}}$, pro qua formula $\int\frac{dt}{\sqrt{2at+tt}}$ commode integranda ſtatuatur

$$t\,(2a+t) = (2a+t)^2\,zz, \text{ vt fit } t = \frac{2azz}{1-zz},$$

eritque

$$dt = \frac{4azdz}{(1-zz)^2} \text{ et } \sqrt{2at+tt} = \frac{2az}{1-zz},$$

quibus ſuſtitutis erit

$$\int\frac{dt}{\sqrt{2at+tt}} = 2\int\frac{dz}{1-zz}.$$

Notum autem eſt eſſe

$$\int\frac{dz}{1-zz} = \frac{1}{2}l\frac{1+z}{1-z},$$

vnde colligitur $u = a\,l\,\frac{1+z}{1-z}$. Eſt vero $z = \sqrt{\frac{t}{2a+t}}$, quo valore reſtituto reperitur

$$u = a\,l\,\frac{\sqrt{2a+t}+\sqrt{t}}{\sqrt{2a+t}-\sqrt{t}}, \text{ ſiue}$$

$$u = a\,l\,\frac{a+t+\sqrt{2at+tt}}{a},$$

vbi conſtantis additione non opus eſt, quia poſito $t = 0$, ſponte fit $u = l\,1 = 0$. Viciſſim autem abſciſſa $t$ per applicatam $y$ ſequenti modo determinari poteſt. Cum inuenerimus,

$$u = a\,l\,\frac{1+z}{1-z}, \text{ erit } \frac{u}{a} = l\,\frac{1+z}{1-z}, \text{ ſiue } l\,e^{\frac{u}{a}} = l\,\frac{1+z}{1-z},$$

(denotante $e$ numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas), ſiue $e^{\frac{u}{a}} = \frac{1+z}{1-z}$, vnde elicitur:

 $z =$

$$z = \frac{e^{\frac{u}{a}} - 1}{e^{\frac{u}{a}} + 1} = \sqrt{\frac{t}{2a+t}}, \text{ ideoque}$$

$$t = \frac{a\left(e^{\frac{u}{a}} - 1\right)^2}{2e^{\frac{u}{a}}}.$$

## Euolutio casus tertii.

§. 20. Cum hoc casu, vti §. 17. videre est, sit $d\Pi = -K\,dp = \lambda y\,dx$, erit multiplicando per $p$,

$$\lambda p y\,dx = \lambda y\,dy = -K p\,dp,$$

et sumtis integralibus $\lambda yy = C - Kpp$. Pro constante $C$ determinanda ponatur, in ipso initio abscissarum A, vbi $y = 0$, fuisse $p = \alpha$, eritque $C = K\alpha\alpha$ et aequatio

$$\lambda yy = K(\alpha\alpha - pp), \text{ siue } yy = \tfrac{K}{\lambda}(\alpha\alpha - pp),$$

ex qua deducitur

$$pp = \alpha\alpha - \beta yy, \text{ existente } \beta = \tfrac{\lambda}{K};$$

hinc extracta radice fiet

$$p = \tfrac{dy}{dx} = \sqrt{\alpha\alpha - \beta yy}, \text{ ideoque } dx = \tfrac{dy}{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta yy)}}.$$

Hinc ob $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ foret arcus,

$$AY = s = \int dy \sqrt{\tfrac{1 + \alpha\alpha - \beta yy}{\alpha\alpha - \beta yy}}.$$

Ponatur br. gr. $\alpha\alpha - \beta yy = zz$, erit $yy = \frac{\alpha\alpha - zz}{\beta}$, ideoque

$$y\,dy = -\tfrac{z\,dz}{\beta}, \text{ hincque } dy = -\tfrac{z\,dz}{\sqrt{\beta}.\sqrt{\alpha\alpha - zz}},$$

quo substituto foret arcus

$$AY = s = -\tfrac{1}{\sqrt{\beta}} \int z\,d\sqrt{\tfrac{1+zz}{\alpha\alpha - zz}}.$$

Arcus ellipticus, cuius rectificatio frustra tentaretur.

Cete-

Ceterum notetur, ex aequatione $dx = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta yy)}}$ prodire $x = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ A fin. $\frac{y\sqrt{\beta}}{\alpha}$, unde colligitur $y = \frac{\alpha \,\text{fin.}\, x\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}}$. Casu igitur $x = 0$, fit etiam $y = 0$; tum vero fit adhuc $y = 0$ casu $x = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$. Cum igitur fit $AI = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$, erit abscissa $AO = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$, et applicata media $MO = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$, tum vero parameter $\frac{AO^2}{OM} = \frac{\pi\pi}{4\alpha\sqrt{\beta}}$.

## Euolutio casus quarti.

§. 21. Supra iam vidimus, hoc casu fore

$$d\Pi = -K\,dp = (b-y)\,dx,$$

vnde multiplicando per $p$, fit

$$(b-y)\,p\,dx = (b-y)\,dy = -K\,p\,dp,$$

ideoque integrando $by - \frac{1}{2}yy = -\frac{1}{2}Kpp$, vel adiecta constante et sublatis fractionibus, erit $2by - yy = C - Kpp$. Quod si igitur, vti casu praecedente statuimus, in ipso termino A fuerit $p = \alpha$, posito $y = 0$ fieri debet $0 = C - K\alpha\alpha$, vnde colligitur constans $C = K\alpha\alpha$, quo valore substituto aequatio nostra integrata fiet

$y\,(2b - y) = K\,(\alpha\alpha - pp)$, ex qua deducitur

$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\alpha\alpha - \frac{1}{K}y\,(2b - y)}$, siue

$$dx = \frac{dy\sqrt{K}}{\sqrt{\alpha\alpha K - y(2b-y)}}.$$

Iam referamus haec ad axem verticalem MO, positoque vt supra $MO = f$ et $AO = g$, fit abscissa $MT = t$ et applicata $TY = u$, et quoniam in puncto supremo M est $p = 0$, erit $2bf - ff = \alpha\alpha K$; et cum fit $x = g - u$ et

$y =$

$y = f - t$, his valoribus introductis erit

$$du = \frac{dt\sqrt{K}}{\sqrt{2bf - ff - 2by + yy}} = \frac{dt\sqrt{K}}{\sqrt{2b(f-y) - (f-y)(f+y)}}.$$

Eſt vero $f - y = t$ et $f + y = 2f - t$, vnde fit

$$du = \frac{dt\sqrt{K}}{\sqrt{2bt - t(2f-t)}} = \frac{dt\sqrt{K'}}{\sqrt{2at + tt}},$$

exiſtente $a = b - f$, haecque aequatio iterum eſt pro curua ex familia catenariarum, quae autem non erit rectificabilis, niſi fuerit $\sqrt{K} = b - f = a$, qui caſus cum ſecundo conuenit.

Ceterum ex iis quae ſupra §. 19. ad finem allata ſunt, facile perſpicitur, hoc caſu fore,

$$u = \sqrt{K}.\, l \frac{a + t + \sqrt{(2at + tt)}}{a} \text{ et } t = a \frac{(e^{\frac{u}{\sqrt{K}}} - 1)^2}{2e^{\frac{u}{\sqrt{K}}}}.$$

PHYSI-

# PHYSICA.

# LYCIA HYBRIDA.

Auctore

*I. T. KOELREUTER.*

### EXPERIMENTUM I.

Lycium barbarum, ♀.
Lycium afrum, ♂.

An. 1766. d. 11 Iul. et seq. Flor. plur.

Vid. Exper. inuers. VII.

Inter frutices arborescentes hic primus est hybridus. Generatio eius, si ♀ in fertiliori solo ac sub dio vigeat, prospere satis succedit, rarius autem, si in ollam transplantata est. Semina d. 10 April 1767, in fimetum sata post octiduum copiose progerminabant. Frutices inde prognati plurimi vtrumque parentem incremento praecoci adeo superabant, vt prima iam aestate floruerint egregie, nouemque pedum altitudinem attigerint, cum Lycia barbara eiusdem aetatis vix duos cum dimidio aequarent, florumque ne vestigium quidem proderent. Subsequenti etiam anno iam Maji initio novis iterum superbiebant flo-

 ribus,

ribus, quo tempore ac barbara quidem, multo minus afra, florere solent. Idem an. 1768 et 1770, sub iisdem circumstantiis euenit. Ita quoque copiosissimo per totam aestatem florum prouentu vtraque longe antecellebant.

## Descriptio.

CAVLIS multo altior ac crassior, quam ♀ et ♂; rigidior idem, magisque aculeatus, quam ♀, ast flexilior longe, leuiorisque armaturae, quam ♂.

FOLIA lineari-lanceolata; minora ac tenuiora, quam ♀, maiora ac crassiora, quam ♂.

CALYX maior, longior, amplior ac obscurius virescens, quam ♀; minor, breuior, angustior atque pallidior, quam ♂.

COROLLA infundibuliformis, violacea: maior quam ♀, minor vero, quam ♂. Matris autem corolla ad rotatam, patris ad cylindraceam magis accedit; color illius ex rubicundo violaceus, pallidissimus; huius e violaceo purpureus, obscurissimus. Ita quoque laciniae corollae ☿ inter longas et angustas siue ellipticas ♀, ac perbreues, latas ac obtusas ♂, medium quasi tenent.

STAMINA violacea, pallidula; longiora, quam ♀, ast breuiora, quam ♂.

PISTILLVM mediae inter ♀ et ♂ magnitudinis ac formae.

PERICARPIVM. Bacca rarior, miniacea, paene cylindracea siue obtuse oualis, bilocularis, sero demum autumno

no matura. Semen vnum alterumue tantum in quouis loculo, vel etiam nullum. Bacca ♀ ovato-oblonga, ♂ subrotunda.

Pedunculi florum 5‴ longi. Longitudo totius floris, a basi calycis vsque ad laciniarum corollae angulos 6½‴. Amplitudo floris ab vno laciniae angulo ad alterum oppositum 4‴. Latitudo laciniarum corollae 3‴; longitudo earundem 2½‴.

Hyemes nostrates (*), nisi solito asperiores sint, aeque fere fert, ac barbarum, cum afri natura iis nunquam assuescat. Turionibus ac resectis stirpis ramulis facile propagatur.

## EXPERIMENTVM II.

Lycium { barbarum. ♀.
afrum. ♂. }

Sem. An. 1769. sponte nata.

Ex his seminibus, an. 1770. ortae sunt plantae sex, quarum pleraeque patri naturali foliis angustioribus iam multo similiores, quam sub priori ipsarum statu hybrido, adeoque tenerae erant, vt proxima hyeme sub dio, ante florescentiam, perierint omnes.

 EXPE-

(*) De regione Carlsruhensi in Suevia intelligendus est Cl. Auctor, vbi experimenta instituta sunt.

## EXPERIMENTVM III.

Lycium {barbarum. ♀. / afrum. ♂.} ⚥

Lycium afrum. ♂.

An. 1768. d. 15. Mai. et ſeq. Flor. plur.

Idem fere habitus plantarum duarum an. 1769. inde progenitarum, eademque foris, qualis priorum Exp. II.

## EXPERIMENTVM IV.

Lycium afrum. ♀.
Lycium europ. ♂.
An. 1773. d. 14. Iun. Flor. 5.
Vid. Exp. inuerſ. V.

Plantae duae, hoc experimento an. 1774. pluresque aliae, an. 1778 enatae, inter vtrumque parentem exacte medium tenebant.

## EXPERIMENTVM V.

Lycium europ. ♀.
Lycium afrum. ♂.
An. 1773. d. 17. Iun. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerſi IV.

Plantae duae, an. 1774 inde procreatae, prioribus Exp. IV. ſimillimae erant.

## EXPERIMENTVM VI.

Lycium barbar. ♀.
Lycium europ. ♂.

An.

An. 1773. d. 13. Iul. Flor. pauci.
Vid. Exp. inuerſ. IX.

E pauciſſimis ſeminibus, an. 1774. vnicus tantum exortus eſt frutex, qui vtrumque parentem ex toto ſimulabat.

## Copulationes Lyciorum aliae fruſtra huc vsque tentatae.

### EXPERIMENTVM VII.

Lycium afrum. ♀.
Lycium barbar. ♂.
An. 1766. d. 18. Iul. Flor. 2.
it. An. 1768. d. 6. Aug. Flor. 15.
it. An. 1772. d. 25. Aug.
et ſeq. Flor. 20.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. I.

### EXPERIMENTVM VIII.

Lycium { barbar. ♀. / afrum ♂. } ♀.
Lycium europ. ♂.
An. 1771. d. 14. Sept.
Flor. plur.
Conceptio nulla.

### EXPERIMENTVM IX.

Lycium europ. ♀.
Lycium barbar. ♂.

An.

An. 1771. d. 25. Sept. Flor. I.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. VI.

## EXPERIMENTVM X.

Lycium barbar. ♀.
Solan. Pſeudocapſ. ♂.
An. 1766. d. 1. Aug. Fl. I.
Conceptio nulla.

## Explicatio Figurarum.

Tab. VI.

A. Lycii {barbari. ♀ / afri. ♂.} ramulus floridus.
B. Calyx diſſectus ac explicatus.
C. Corollae facies anterior.
D. Corollae facies poſterior.
E. Corolla ſecundum longitudinem diſſecta, cum ſtaminibus.
F. Piſtillum.
G. Bacca.

DE

# DE
# CONFERVAE NATVRA,
## DISQVISITIO CHEMICA.

Auctore
*I. G. GEORGI.*

Postquam *Peysonelli* inuentum de Lithophytis ad animalia referendis consensu et applausu celebrari coepit, pluribus inter recentiores naturae scrutatores contigit in aliis quoque generibus corporum organicorum, quae ad Cryptogamas plantas olim ab Ill. Equite a *Linné* referebantur, obseruasse sensum vitalem, motum spontaneum, et cum aemula Hydrae sic dictae seu Polypi natura (gemmascendi et per sectionem corporis in partes multiplicandi) alias quoque regni animalis proprietates; quibus permoti ea non pro ambiguis et intermediis, sed pro veris animantibus declarare haud dubitarunt. Contra alii hodienum argumenta satis numerosa protulerunt, quibus dubia ista genera ad regnum vegetabile esse referenda, imo pro imperfectis potius plantis habenda, sibi persuadent.

Aliqui ex vtraque dissentientium cohorte inter regnum animale et vegetabile tantum ponunt analogiae, tot enumerant affinitatum momenta, quibus vtrumque hoc regnum retis fere instar cohaeret; vt distinctiuos vtriusque

Regni characteres externos haud sufficere, sed corpora vniversa globi nostri terraquei non in *tria regna*, sed in *duo* tantum dispescenda esse statuant, quarum vnum vniuersum corporum organicorum, vegetabilis et animalis naturae, apparatum, alterum corpora bruta vel mineralia comprehendat; Organicorum vero corporum in duo Regna subdiuisionem, licet pro methodo vtilem, non tamen ab ipsa natura institutam docent.

Chemia potuisset litem dirimere, nisi eius quoque opera ex vtriusque naturae regni corporibus, educta et producta analoga, principia admodum affinia, eademque basi terrea e minerali regno assumta, cum aquea parte prodirent; vnde plantarum et corporum animalium analyses chemicae vtplurimum steriles obtinentur.

Attamen similitudo ista non tanta est, vt non chemia satis multa inter animalia et plantas, ex iis praesertim classibus, quae non ambiguae sunt naturae, differentiae momenta detegat; sic in vegetabilibus omnibus tendentia ad acescendum, fermentatio spirituosa et acida, alcali fixum vegetabile; dein mucilaginum eductorum acescentia, resinae, gummi-resinae, olea essentialia cum rectore, cera, camphorae, peculiares constituunt characteres. Animali contra regno propria: putrescentia alcalina, nulla fermentatione spirituosa acidoque praeuia, alcali volatile sub destructionem omnis ex hoc regno substantiae, (non excepta gelatina, lacte et adipe, ad vegetabilem naturam propius accedentibus) generatum, et sal ammoniacalis; deficientibus simul oleis essentialibus, camphora, cera et praeter paucas exceptiones, etiam resina.

Haec

Haec me adduxerunt vt, licet Naturae Myſtarum lites componendo imparem me ſentiam, ambiguorum corporum aliqua chemicae analyſi ſubiicerem, praeſertim quum pauca eorum hucusque chemice illuſtrata fuerint. Conſtabit inde ſaltem cuinam Naturae regno, quoad mixtionem, ſint analoga. Dabo hic primum vulgaris Conferuae riuularis et lacuſtris L. analyſin, quae licet motu vitali ab *Adanſonio* et Abbate *Corti* in alia ſpecie obſeruato haud gaudeant, tamen vti externa ſimilitudine, ita et principiorum chemicorum natura iſti conſentire, ſaltem proxime videbuntur.

Conferuas pro experimentis adhibitas, riuularem et lacuſtrem Auguſto menſe in ripa arenoſa oſtii Neuae fluuii, recedente aqua, promiſcue collegi. Arena ſubtilis, alba quaſi inſerta videbatur, neque repetita lotione, ſiccasue Conferuas conciſas in cribro agitando plane ſeparari potuit. Odor recentis et dum ſiccabatur, quod etiam in hypocauſto nonniſi lente factum eſt, paluſtris fuit, licet in puriſſima aqua creuerat; isque odor ne in ſicca quidem penitus abfuit.

Conferua recens vel ſiccata commanducantis ſaliuam vireſcente imbuit colore, guſtui ſenſum vix vllum excitans, et filamenta exſucca, tenacia ſatis relinquit. Siccata ad candelam facile comburitur, at ſine flamma, empireuma volatile ſimul ſpargens. Librae quatuor recentis, ex aqua deſtillatae, phlegma inſipidum, odore paludoſo, nullumque olei veſtigium dedere.

Siccatae Conferuae vnciae duae cum aqua iterato ebullientes, decoctum praebuerunt vireſcens, limpidum

 ſub-

ſubacidulo fere guſtu; quod evaporatione ad decem drachmas coactum, extracti formam habuit, conſiſtentia mellis, guſtu vix amarum; quod, per quatuor et vltra menſes aſſeruatum, nihil ſalini cryſtalliſabilis exhibuit, licet reagentia aliquid ſalis muriatici adeſſe teſtarentur. Reſiduum a coctura filamentis ſatis tenacibus, viridiuſculis conſtat, quorum maſſa ſiccata vnciam cum duabus drachmis efficit, et ad candelam viuida cum flamma, ſine fumo vllo, comburitur.

Vncia Conferuae ſiccatae in ſpiritu vini alcoholiſato extracta, infuſione pulcre viridem colorem liquido praebuit, digeſtione ſaturatum. Tinctura ſic parata gratum amarorem prodidit; qua euaporata et abluto reſiduo, octodecim grana reſinae vegetabilis nigreſcentis, ſiccae ſuperfuerunt, quae alba cum flamma incenditur, ſimul liquatur et odorem gratum ſpargit. Conferuae ſic extractae reſiduum ſiccatum, fuit ſex drachmarum, fragilis atque fuſcae ſubſtantiae.

Vnciae octo Conferuae ab adhaerente arena quantum fieri potuit depuratae, deſtillatione ex retorta vitrea ſequentia producta largiebantur:

1. Phlegmatis limpidi, inſipidi, paludem redolentis vnciam vnam.

2. Phlegmatis empireumatici, primum flaueſcentis, deinde ſaturatioris, collectim vnciam cum drachmis ſex.

3. Olei

3. Olei empireumatici nigrescentis atque satis crassi drachmam sesquitertiam; quod vero huius olei in retortae recipientis collo adhaeserat adustum, tantundem videbatur ponderis aequasse.

4. Residuum destillationis carbonaceum, pulverulentum, vnciarum trium cum dimidia fuit.

Salis volatilis sicci nihil omnino apparuit, licet vasis recipientibus saepius permutatis, semperque luto bene munitis; odor tamen phlegmatis cum oleo destillantis aliquantum volatilis visus est.

Phlegma N°. 2. addito alcali deliquato lactescit, odoremque vrinosum, sed lenissimum prodidit; quiete deinde secedit oleum ex hoc phlegmate nigrescens.

Cum acidis nihil mutatur idem; ab oleo tamen separatum aliquantum acidis monetur et odorem vrinosum amittet.

Cretae solutio in acido nitri hoc eodem phlegmate haud praecipitatur; mercurius eodem acido dilutus statim, et argentum post aliquod horas fusci sedimenti forma deiicitur.

Hepar sulphuris, digestione cum oleo tartari deliquati paratum, statim cum foetore turbatur, flauumque sedimentum deponit.

Tincturae Heliotropii aquosae mixtum phlegma lacte rubrum colorem illico inducit, eundemque colorem

chartae ista colorațae tinctura ex eodem assumunt. Quae vero ligno Fernambucano et radice Curcumae tinctae sunt chartae, nihil inde mutantur.

Caput mortuum, satis ponderosum, ab arena tamen immixta separari non poterat. In crucibulo calcinatum in cineres rubescentes et satis ponderosos transiit, qui aqua bulliente abluti, drachmas sex cinerum leuiorum eiusdem coloris praebuerunt, reliquo pondere per depositam arenam amisso.

Aqua, in qua eloti fuerant cineres filtrata, enaporatione reliquit salis rufescentis quindecim grana, lamellarum forma, cum immixtis tesseris minutis. Hic sal gustu culinarem, cum amarore iuncta, refert, aëris humore non deliquescit, in igne crepitat sine odore sulphureo, cum acidis parum feruet, argentum in acido nitri solutum floccorum specie deiicit. Vt itaque pro *sale culinari*, nimio alcali onusto habendus sit, cuius pars, vi ignis amisso acido, alcalinam illam mixturam produxisse videtur.

Vt cineres et terream basin Conferuae penitius scrutarer, iterum vncias eius octo, quantum poterat fieri depuratae, in crucibulo ignito successiue combussi. Succendebatur flamma lenta, depressa, violacea, comite fumo spisso, odoris aliquantum volatilis. Carbo leuis, multo citius, quam qui a combustis agaricis obtinetur, in cineres rufescentes, grauiores abiit, quorum pondus fuit duarum et semis vnciarum, cum immixta scilicet arena, quae inter dentes aperte stridebat. Hac dein lotione segregata, sal ex adhibita aqua prodiit simillimus illi, quem

ex

ex capite mortuo descripsi, culinaris nempe, cum tantillo alcali mineralis non saturati. Eiusque pondus vniuersum septendecim fuit granorum.

Leues *cineres* lotione depuratos, siccatosque calcinaui. Subtilissimi videntur, et particulas satis multas continent ferreas, magneti adhaerescentes, praesertim post praeuiam cum sebo vstionem. Gallarum quoque infusum inde nigrescit; sed cum acidis cineres isti vix quidquam mouentur.

Semidrachma horum cinerum, cum drachma salis tartari et dimidia boracis facile funditur in vitrum impurum seu scoriam virescentis coloris, quae aëri exposita humescit sensim, fit nigra, tandemque fere deliquescit. Hac feruenti aqua soluta, grana octodecim terrae nigrae, aliquantum vitrificatae superfuerunt; solutio vero limpida, sine vllo colore apparuit. Huic si affundas acidum vitrioli, sub efferuentiam insignis surgit hepatis sulphuris foetor, et sensim aucta acidi proportione color viridis magisque saturatus oritur, seruata tamen limpiditate liquoris adusque saturationem; qua perfecta, turbatur et sedimentum ponit, quod tamen denuo ex parte resoluitur, superstite post elixiuationem exigua (granor. sex) quantitate terrae siliceae, dilute coeruleae.

Liquor acido saturatus euaporatione generat crystallos exiguas, depressas, partim polyedras, perfecte hyalinas, in ore difficillime solubiles, subamaricantes, in igne cum crepitatione dissilientes, quae spatosae naturae esse videbantur. Vlteriore euaporatione producuntur cry-

stalli

ſtalli tartaro vitriolato et alumine mixtae, quae ex parte in phialae pariete dendritica forma concreſcunt.

Drachma cinerum depuratorum in vncia ſpiritus vitrioli digeſta, eundem nullo colore tinxit. Liquor poſt colaturam, vt et aqua quibus cineres abluti fuerunt, acidum et ſtypticum ſaporis ſenſum excitabant, et ablutio cinerum, licet feruida inſtituta, multam aquam requirebat. Reſiduum ſcrupulos duos pondere ſuperauit. Liquori acido atque ſtyptico, qui limpidus manſerat, aliquantum alcali fixi ſoluti, ſed nequaquam ad ſaturationem, adfuſum eſt, cuius efferueſcentia viridem excitauit colorem, et terrei aliquantum, ſeleniticae, vt videtur, naturae praecipitauit. Euaporatione deinde inſtituta inſignes cryſtalli virides, pellucidae oriebantur: verum ſcilicet alumen, acido ſuperabundante foetum; ſimul apparuere paruulae cryſtalli, paruaque copia et albo colore, quae tartari vitriolati characteres ferebant. In hoc experimento viridis ille color, et nigreſcentia liquoris cum tinctura gallarum, indicabat acidum vitrioli ſimul cum terra aluminari particulas ferreas in cineribus contentas ſoluiſſe.

Semidrachma cinerum cum quinque drachmis Spir. nitri digeſta, e filtrato liquore, poſt ſaturationem ope Alcali fixi inſtitutam, ſedimentum calcareum album proiecit, cuius pars aliqua denuo reſoluta fuit, vt reſiduum ſiccatum trium modo granorum pondus aequaret.

Itaque libra (ſexdecim vnciarum) Conferuae lacuſtris et fluuiatilis exſiccatae, quae recens ex aqua educta, obiterque expreſſa quatuor fere librarum pondus efficit, per

per analyſin noſtram, ſubducta arena adhaerente haec circiter principia continet:

Phlegmatis partim aquei puri, partim empyreumatici, addito, quod in extracto aquoſo remanet circiter . . vnc. viij.
Extracti aquoſi mucilaginoſi poſt exſiccationem . vnc. vj.
Reſinae vegetabilis circiter . . . . . . . drach. v.
Phlegmatis aciduli empyreumatici, ſupra . . vnc. iij.
Alcali volatilis aciditate abſorpti . . . . . veſtigium.
Olei empyreumatici, vltra . . . . . . . ſeſcunciam
Cinerum carbonaceorum ſine arena, circiter . vnc. v.
Cinerum teneriorum fere . . . . . . . vnc. ij.
In iisque Sal. culinaris ex parte in alcalinam indolem decompoſiti, vſque ad . . ſcrup. ij.
Cum terrae vitreſcibilis, aluminaris, calcareae et principii ferrei mixtura.

Nihil ergo olei eſſentialis aliorumue ſalium; omnia que principia vegetabilis naturae, nullis animali regno peculiaribus admixtis.

# DESCRIPTIO
# VESICVLAE FELLEAE TIGRIDIS, EIVSQVE CVM LEONINA ET HVMANA COMPARATIO.

Auctore
*C. F. WOLFF.*

Insignem omnino in plerarumque partium structure similitudinem inter tigrim et leonem reperi; multa tamen haud parui momenti diuersa quoque in vtroque hoc animali inueniuntur; atque inter ea imprimis vesicula fellea referenda esse videtur. Ea enim quamuis in iis etiam in vtroque animali conueniat, quae maxime singularia in leonina obseruabantur, (*) et quibus haec ab humana et plerorumque animalium caeterorum vesiculis diuersa est, tamen non desunt quoque varia in ipsa hac singulari structura, quibus vesicula leonis a tigridis vesicula differt.

Hepar in tigri sex lobis constat oblongis, plane ad marginem vsque postremum a se inuicem separatis, nec nisi paruis portionibus carnis hepaticae inter se cohaerentibus. Horum qui dexterior medius, idemque et caeteris maior, iterum incisus est, atque in duas diuisus portio-

(*) Vide Commentar. nouor. Tom. XIX. Dissert. Destructura interna vesiculae felleae leonis.

tiones. Inter quas vesicula fellea ea ratione haeret, vt solo fundo suo et libera sit ab adhaesione, et anterius prae hepate emineat, toto reliquo corpore autem inter binas istas portiones, ipsaque in carne hepatis immersa, haereat.

Ab ea leonina structura recedit, propiusque multo accedit ad humanam. In leone nimirum aeque atque in homine vesicula fellis superficiei inferiori hepatis applicata est, eiusque communi tunica externa simplici obducta. Quo fundus non modo, sed totum vesiculae corpus, et ipsum collum quoque, in inuerso hepate protinus in conspectum veniunt. Attamen sunt quaedam in ipso hoc leoninae vesiculae situ, quibus haec aliquomodo ad tigridis vesiculam inclinare, atque medium quasi locum inter eam et humanam obtinere videtur. Ligamenta dantur peculiaria in vesicula leonis, quae ex tunica eius externa duplicata orta vtrinque de medio corpore exeunt, et ad superficiem hepatis se applicant, firmiterque eidem adhaerent. His media pars vesiculae arctius ad hepar adstringitur, eoque efficitur planior, vt vix in hac sede de superficie hepatis emineat; cum contra in partibus, fundo et collo propioribus, tumida sit vesicula atque inflata. Humanam constat vbique aequaliter tumere, totaque sua superficie inferiori puluinata ad collum vsque liberam esse ab omni adhaesione. Sic tigridis ergo et leonis vesiculae arctius et ligamentis fortioribus ad hepata sua alligata atque adstricta esse videntur.

Figura his tribus vesiculis fere eadem est, oblonga et fere pyriformis; neque videtur in caeteris quoque ani-

 ma-

malibus quadrupedibus, quorum hepar veſicula inſtructum eſt, valde ab ea figura differre. Incipit in omnibus ex ductu anguſtiori, quem cyſticum dicunt; inde continuo magis magisque amplitudine augetur, et finitur fundo clauſo inflato, qui partibus reliquis omnibus largior eſt. Haec, ni fallor, notiſſima veſiculae felleae figura communis eſt animalibus, quae eam habent, omnibus; niſi forte paulo anguſtior in aliis proportione et longior, in aliis largior et breuior inueniatur. Aliquid tamen in leonina, cum hanc obſeruarem, reperi peculiare reſpectu figurae, quo ſe ab humana et a reliquorum, quantum ſcio, animalium veſiculis diſtingueret. Non recta extenſus eſt ſacculus; ſed variis in ſedibus vno alteroue latere inflexus, quo tunicae, quibus veſicula efficitur, duplicatae introrſum in cauitatem ducuntur, ſeptaque producunt latiora, aut anguſtiora, quibus in loculamenta quaſi varia veſicula diuiditur. Circa partem imprimis poſteriorem eiusmodi inflexiones in veſicula leonina obſeruantur; ſolentque alternatim vtrinque poſitae eſſe, quo ductum quaſi ſerpentinum veſicula in his regionibus imitari videtur. Similis ergo et tigridis veſiculae figura atque fabrica eſt.

Deinde haec quaſi torta ſimul eſſe videtur, cuius in ſuperficie, ab hepate auerſa, rugae et crenae ſatis profundae apparent, quae a margine dextro oblique antrorſum ad fundum veſiculae et ſiniſtrorſum ad partem ſiniſtram decurrunt, vel a ſiniſtro eius latere incipiunt atque in dextrum oblique retrorſum tranſeunt. Maxima pars harum inflexionum obliquarum et torſionum poſteriorem veſiculae partem occupat. Quaedam tamen earum ſuper vniuerſam fere veſiculam et ad fundum vsque continuantur.

tur. Vna tandem eiusmodi inflexio eſt, quae inter reliquas notari meretur, et qua veſicula tigridis a leonis veſicula aeque atque obliquitate inflexionum et torſionibus ſe diſtinguit. Prope fundum ea eſt, duciturque praeter morem caeterarum transuerſim circa veſiculam, eamque in hac ſede quaſi conſtringit, quo, quae reliqua eſt, eius pars ad fundum vsque, extenditur tumidiorque atque inflata eſſe videtur. Ad eandem hanc ſedem vsque, vbi veſicula conſtringitur, immerſa haec quoque eſt, et abſcondita inter lobos hepatis. Quae vltra conſtrictionem autem ſupereſt eius pars caeteris magis inflata, ea ſola et libera eſt ab adhaeſione et prae hepate anterius eminet. Sic iſta pars ſitu figura et magnitudine diſtincta tota in veſicula tigridis fundus appellari meretur.

Veſicula fellea hominis tota aequalis eſt et aequaliter extenſa in ſuperficie ſua exteriori ſeu inferiori. In ſolo fine poſteriori, vbi veſicula eſſe deſinit et ductus fieri incipit, vel etiam in collo veſiculae, vna et altera leuior curuatura obſeruari ſolet. Ductus autem cyſticus ipſe variis in homine inflexionibus et curuaturis omnino notatur; vt ſpiralem quoque ei figuram nonnulli anatomicorum adſcripſerint.

Ligamentis tigridis veſicula tribus gaudet teretibus, quibus ad hepar reuincitur. Haec membranis latioribus, ex tunica veſiculae externa continuatis, obducuntur et inuoluuntur, cum iisque ad hepar ſe applicant; quemadmodum vteri ligamenta teretia in alis veſpertilionum continentur, in iisque ad latera peluis feruntur. Craſſa ſunt et robuſta haec ligamenta teretia et duplicatura tunicae ex-

ternae vesiculae efficiuntur, in qua densa et dura cellulosa tela continetur. Duo eorum lateralia sunt et anteriora, tertium posterius et longitudinale seu obliquum. Hoc in ea sede vesiculam tenet, vbi pars eius maxime plicata et torta desinit, inter eam et mediam vesiculae partem, magis aequalem. Tum ita positum est, vt ex media vesiculae superficie retrorsum progrediatur primum, deinde flexum ad partem dextram hepati adhaerescat.

Anteriora duo teretes funiculi sunt, quae in vna membrana, vtrinque expansa, continentur. Membrana vesiculam in ea ipsa sede complectitur, vbi haec constricta est, inter partem eius mediam aequalem et fundum distinctum. Bina teretia ligamenta vtrinque a se mutuo discedunt, et vesicula iis ad binas lobi hepatici portiones alligatur; inter quas illa quasi abscondita haeret.

Sic patet, vesiculam tigridis in tres partes natura esse diuisam, quarum posterior a ductu cystico incipit et ad ligamentum posterius vsque se extendit. Ea quartam circiter totius vesiculae partem, aut paulo plus eo continet, efficitque ipsam eam regionem, quae intus multis variisque plicis et recessibus insignita est. Altera pars media est, quae inter ligamentum posterius et anteriora continetur, quaeque quasi vnam cum dimidia quartam vesiculae partem efficit. Haec aequalis est externe, et plicis interne caret. Tertia pars anterior et ipsa ea est, quam fundum dixi, quae notabili illa vesiculae constrictione a reliquis posterioribus partibus adeo manifesto distinguitur. Haec ergo ligamenta anteriora inter et extremum finem

vesi-

vesiculae continetur, vnamque quasi quartam longitudinis vesiculae partem efficit.

Leoni duo tantum ligamenta sunt lateralia et transversa, quae mediam fere vesiculam tenent, indeque vtrinque egrediuntur. Diuisio tamen similis in leone atque in tigride obtinet in partem posteriorem, intus plicatam, quae inter collum in leone et ligamenta continetur; in mediam, plicis vacuam, quae ligamenta inter et fundum est, et in fundum ipsum. Humanam vesiculam simplici tunica externa, in externam hepatis tunicam continuata, hepati annexam esse constat; nec aliter nisi in collum corpus et fundum esse diuisam.

Vt fundus autem merito haec pars anterior in tigride dici posse videtur, mediam procul dubio corpus vesiculae, collumque posteriorem appellare recepta inter anatomicos denominatio suadet. Verumenim et ipsa in tigride haec pars vesiculae posterior longa nimis est, nimisque notabilem totius vesiculae partem continet, quam vt ad collum referri possit, vel comparari cum ea minima parte, quae in humana vesicula eo nomine venit; et nil nis praeterea similis est haec pars illi, quae in vesicula leonis plicata intus et folliculosa est, similiterque inter ductum cysticum et ligamenta continetur, et quae dimidiam fere in hoc animali totius vesiculae partem efficit. Accedit, quod aliqua huius partis portio in leone detur, cystico ductui proxima, et manifesto distincta, quae merito cum collo vesiculae humanae comparari potest, et quae docet igitur, partem intus plicatam in tigride non minus quam in leone aliam, et maiorem collo, vesiculae partem

esse;

esse; et naturam ergo non adeo vsque solitam eam diuisionem curare, vt in omnibus animalibus inueniatur.

Tunicae, quibus tigridis vesicula constat, pariter atque leoninae, cum iis omnino numero, natura, ordine, conueniunt, quibus humana efficitur. Neque dubito, quin in omnibus animalibus quadrupedibus vesiculae similibus sint compositae tunicis. Hoc solum vtrique, leonis et tigridis, vesiculae prae humana et caeterorum, ni fallor, animalium vesiculis peculiare est, vt variis in sedibus, imprimis in parte posteriori, intus plicata, tunicae interiores varie ab exterioribus secedant interstitiaque efficiant, quae densa duraque cellulosa replentur. Hinc vesiculae substantia, imprimis leoninae, in qua tunicae et frequentius et longius a se inuicem secedunt, tres passim et quatuor imo et quinque lineas crassa inuenitur. In humana vesicula tunicae vbique sibi parallelae, vbique sibi contiguae sunt, et vniuersa vesicula vbique tenuis, vbique aequalis.

Incisa vesicula fellea tigridis, partem posteriorem, leoninae analogam, ea tamen minorem, plenam reperi plicis, variae figurae et magnitudinis, sinibusque et recessibus, variae pariter indolis. Generatim et plicae et recessus maiores multo in leone, in tigride multo minores sunt; similitudo autem insignis, imprimis inter plicas vtriusque vesiculae intercedit.

Primum ergo in postrema vesiculae eaque angustissima parte, qua ex ductu continuatur cystico, moles continuo apparet plicarum conglomeratarum, quae cauitatem fere vesiculae in hac sede occupat. Indicaui in descri-

ſcriptione veſiculae leoninae (Tomo Commentarior. nouor. XIX. pag. 383. 384.) qua ratione et ſimplices plicae et moles eiusmodi plicarum conglomeratarum efficiantur. Secedit vel neruea tunica vna cum villoſa a muſculoſa, vel ipſa haec poſterior cum binis prioribus ab externa veſiculae tunica, et interſtitium inter ſecedentes eamque, quae recta tranſit, quod oritur, denſa craſſaque celluloſa repletur. Sic intra veſiculam protuberantia efficitur, quae veſiculae cauitatem, vel aliquam eius partem in ea ſede occupat. Tum vero in ipſa protuberantia ſeu mole, intra veſiculam eminente, interna villoſa tunica porro a neruea variis in locis ſecedit, variasque ſui duplicatura pli- [illegible] angulo iſti protuberantiae inſident, marginibusque acutis in cauitatem veſiculae reſpiciunt. Atque ea ratione omnes plicae iſtae quaſi in vnam molem conglomerantur. Simplices autem oriuntur, dum ſola villoſa a neruea recedit, ſuique duplicatura plicas diſtinctas efficit.

Seriem quaſi hae plicae in principio veſiculae inter ſe efficiunt, quarum prima et ſecunda tranſuerſim poſitae marginibus ſuis acutis retroſum et ductum verſus cyſticum reſpiciunt, tertia vero, quarta quintaque et ſexta demum, tranſuerſae ſimiliter, acutis marginibus antrorſum ad veſiculam ſpectant. Simillima ſeries plicarum, in vnam ſimiliter molem conglomeratarum, in leoninae quoque veſiculae principio reperiebatur; modo vt plicae multo maiores in hoc animali eſſent, magisque a ſe mutuo diſtarent, et interſtitia loculamentaque maiora efficerent.

Continuo hanc ſeriem plicarum in tigridis veſicula fouea excipit magna et profunda, elegantia ſtructurae inſignis, et vorticis maris ſimillima. Ea plicis efficitur circularibus aut ſemicircularibus et concentricis, quarum exteriores maioresque ſuperficiei internae veſiculae aequales ſunt, interiores autem et minores, quo propius ad centrum commune accedunt, eo ſunt profundius in ſubſtantiam veſiculae immerſae. Intimus denique circulus, qui integer eſt, profundiſſimam continet ſpeluncam, quaſi abyſſum.

Poſt hunc antrorſum alius ſequitur eiusmodi vortex, fabrica tamen minor [illegible] duo alii porro, iuxta ſe inuicem poſiti, in parte veſiculae latiori obſeruantur. His ſingulis in media parte fouea profundior eſt, quae plicis circularibus minoribus, paucioribus pluribusue, circumdatur atque includitur. Interſtitium autem inter vortices hos quatuor plicis obtuſioribus repletur.

In leone vortices eiusmodi nulli reperiuntur. Sunt autem duo magni et ampliſſimi folliculi in eo, integerrimi et ſubrotundi anguſtoque inter ſe orificio communicantes. Horum parietes intus plicis transuerſalibus partim, partimque arcuatis exornantur; atque hi ſunt, ad quos vortices tigridis comparaueris, quibusque illi analogi eſſe videntur.

Denique tota haec pars veſicae poſterior in tigride, quae plicis deſcriptis et verticibus repleta eſt, magna ſed ſimplici plica transuerſali terminatur et a reliqua anteriori

riori parte, quae plicis caret, diſtinguitur. Similis in leone quoque magna latiſſima et egregia plica eſt, qua ſimili modo pars anterior rugoſa a poſteriori plicata et folliculoſa parte ſeparatur.

Rugis, quae nunc ſequitur in tigride vt in leone, tota reliqua veſiculae et maxima pars intus ornatur; plicae vero non porro reperiuntur; excepta vnica inſigni ſimplici, de qua continuo dicam. Rugae retiformes paſſim vel ſubretiformes eſſe videntur. Alibi arcuatim ducuntur; maximam partem autem vndulatim ſe mutuo excipiunt.

In ipſa ea ſede, vbi exterius ligamenta anteriora veſiculam tenent, vbi haec conſtricta eſſe videtur, quo fundus a corpore veſiculae diſtinguitur, inſignis intus et ſemipollicem lata plica transuerſalis haeret, qua ipſa conſtrictio efficitur, et qua intus cauitas fundi aeque a reliqua veſiculae cauitate diſtinguitur ac extus ligamentis et conſtrictione a veſicula fundus. Nullam in ipſo leone ad hanc ſedem veſiculae plicam, ne minimam quidem, inueni. Simplices rugae ſunt, quibus ad extremum finem vsque veſicula repletur. Et fundus in leone non magis quam in homine terminis notatur, niſi imaginariis et vagis, quibus a corpore diſtingueretur.

Sic facies eſt interna veſiculae felleae tigridis. Inſignes ſunt plicae et ſatis copioſae, figura ſingulae ſimiles valuulis ſemilunaribus vaſorum, modo vt non munere verarum valuularum fungantur. At enim cum leoninis ſi comparantur, paruae eſſe videntur et paucae et imperfe-

 ctae;

ctae; atque id eo magis, cum adeo figura et situ et positione sint similes illis; quo quasi vesicula tigridis imaginem leoninae imperfectiorem referre videtur.

Similitudo ergo omnino vera quoque existit in hac corporis particula inter tigrim et leonem; quamuis ea ob varias diuersitates interspersas non adeo sit luculenta. Et verus character, quo tigris cum leone ad vnum ordinem redigitur naturalem, vti per omnem procul dubio fabricam corporis diffusus, vesiculae felleae quoque impressus existit.

Aperto ductu cystico, inanem hunc reperi et vacuum plicis et cellulis in tigride aeque ac in leone. Laevis est intus in animali vtroque et striis modo longitudinalibus notatus; eminentiis omnino caret.

Contrarium plane in homine obseruatur, cuius vesicula plicis priuata fere, ductus contra refertissimus est. Sed pulchra haec fabrica humana, quae tam varia in variis biliferorum vasorum partibus, nec cognita plane ac penitus, vt opinor, est, proprio sermone definiri minutius que explicari meretur; idque eo magis, cum antequam iconem huius vesiculae exponam, consultum mihi esse videtur quaedam praemonere de inconstantia fabricae corporis humani generatim, et de eligendis ad illam repraesentandam exemplaribus.

## Fig. I.

Tab. VII. Vesicula fellea tigridis integra, ex hepate resecta, figura magnitudine naturali. Situs vt in hepate sursum reflexo.

*a. a. b.*

*a. a. b.* Fundus, liber a ligamentis et adhaesione, inter lobos hepatis solus eminens, magisque reliquis partibus inflatus.

*b.* Fundi apex, seu finis extremus, qui in situ naturali ante hepar sursum respicit.

*a. a. c. d.* Tota haec pars ligamentis partim, partimque cellulosa hepati non modo adharet, sed latet quoque profundius inter lobos hepatis.

*a. e. c.* Latus ad hepar applicatum.

*a. f. d.* Latus ab hepate auersum.

*a. a. e. f.* Pars vesiculae plicis intus vacua.

*e. f. c. d.* Pars posterior plicis repleta et folliculosa.

*g. h.* Ligamenta anteriora lateralia, membrana inter se connexa, quibus anterior vesiculae pars hepati alligatur. *g* Quod ex latere hoc vesicae, quod repraesentatur, *h* alterum, quod ex opposito vesicae latere, deriuatur.

*i.* Ligamentum posterius longitudinale, quod in latere (*e. c.*) vsque ad diuisionem fere ductus cystici continuabat, et cuius ope haec pars (*e. f. k.*) hepati adhaerebat.

*k.* Ductus cysticus.

*l. m.* Duo ductus hepatici.

*n.* Ductus choledochus.

## Fig. II.

Vesicula fellea longitudinali sectione aperta.

*a. b. b.* Fundi cauitas (fig. 1. *a. b. a.*)

*b. b.* Plica magna transuersalis semilunaris, qua fundus a corpore distinguitur. Fundus rugis repletus est.

*b. b. c. c.* Pars vesicae anterior, quae plicis similiter caret, et rugis, varie ductis, ornatur.

*c. c.* Plica altera magna semilunaris transuersalis, qua pars anterior a posteriori distinguitur.

*c. c. c.* Pars posterior vesicae plicis plena (fig. 1. *i. f. c. d.*)

*e. f.* Ductus cysticus apertus.

*d. d.* Ligamenta anteriora lateralia ab inuoluente membrana liberata.

*g.* et *i.* Ductus hepatici.

*h.* Ductus choledochus.

*k.* Cauitas sub plica (*c.*) reclusa, plicis longitudinalibus repleta.

*l. m.* Substantia vesiculae crassior in his sedibus; eius superficies externa.

*n. n. n. n.* Vortices, seu folliculi plicati, leoninis folliculis analogi; quorum postremus elegantissime structus, bini anteriores autem, iuxta se positi, valde profundi sunt; dum cauitatibus suis et fundis sub partem (*k*) producuntur.

*o.* Series plicarum conglomeratarum quae primum vesiculae principium occupat.

*p.* Lacuna in ductu cystico insignis.

TRES

# TRES ONISCORVM SPECIES DESCRIPTAE.

Ab

I. LEPECHIN.

## ONISCVS ACVLEATVS.

Tab. VIII. Fig. 1.

Oniſcus thorace nudo, dorſo tribus ordinibus cuſpidum [illegible]

## Deſcriptio.

Longitudo totius animalculi, exceptis antennis, XI. linearum. Caput hemiſphericum, oculi magni, protiberantes, coerulei. Os inferius ſitum in fouea rotundata pone inſertionem antennarum, protuberans denticulis quatuor, quorum duo ſuperiores, maxillam efficientes, validiores ſunt, inſtructum. Antennae IV. per paria diſpoſitae: par inferius magis validum quadriarticulatum: articulus capiti proximus breuiſſimus, ſecundus longior craſſior que complanatus, tertius breuior ſecundo et debilior, quartus longiſſimus ſetaceus. Thorax ſemiouatus gibbus, ſegmentis VI. quorum vnumquodque in medio tuberculo, vix nudo oculo conſpicuo, notatur; at in vltimo ſegmento inferior margo euidentibus cuſpidibus armatur; reliquum corpus tribus conſtat ſcutis, quorum latera ſunt plana in formam ſemi-

lunae

lunae efficta, in abdomine appendicibus trium parium pediformibus, articulatis, extremo setaceis, instructa; in dorso autem tribus ordinibus cuspidum armata, quorum debiliores medium dorsum, fortiores vero vncinnatae, latera, occupant. Dedes VII. parium, quorum duo anteriora cheliformia, vnco acuto terminata, breuiora, reliqua longitudine crescunt, ita vt vltimum sit longissimum, quadriarticulatum, femora latiora fere triangularia.

Cauda tribus constat segmentis attenuatis, vbi aculei, ratione ad dorsum habita, sunt debiliores, et tandem in aculeum complanatum, subulatum et firmum exit; reliquam caudam constituunt tria paria appendicum filiformium, quarum ext[illegible] cinnabarinus. Locus mare album.

Tab. VIII. Fig. 2.

## ONISCVS SCORPIOIDES.

Oniscus thorace globoso ouato, glabro; cauda elongata, articulata, spina setis que bifidis terminata.

### Descriptio.

Curiosum atque singulare animalculum tam ratione structurae suae, quam ratione anomaliae partium. Caput valde exiguum, oculi prominentes approximati. Thorax vndique tegitur scuto globoso ouato transuersis atque semilunaribus rugis notato; ex cuius parte anteriori exeunt appendices duae breues, claudentes caput et antennas, quae sunt IV. breuissimae filiformes. Os inferius situm exiguum, appendiculis IV. setaceis minimis instructum, quae, vti videtur, pro maxillis inseruiunt. Dorsum itidem tegitur scuto, sed

ſed molliori in formam coni truncati, cuius vertex caudam, baſis vero thoracem reſpiciunt; lineis circularibus tribus notatum, quae totidem dorſi ſegmenta repraeſentant. Pedes ytrinque VII; horum paria anteriora IV validiora, ex tribus articulis conflata, apice vncinnulo armata, antrorſum verſa, et quae pro lubitu animalculi ſub margine prominente ſcuti thoracici tanquam in vagina reconduntur; reliqua pedum paria retrorſum ſpectant. Cauda longitudinem totius corporis adaequat, tenuis, triquetra, conſtans articulis V. Horum vltimus medio in aculeum, ſat firmum exit, ad latera vero ſetis longis apice bifidis terminatur. Ad ripas maris albi copioſus. Longitudo totius animalculi X linearum.

## ONISCVS CVSPIDATVS.

Tab. VIII. Fig. 2.

Oniſcus thorace articulato, tuberculoſo, ſegmentis dorſalibus VI, cuſpidatis.

## Deſcriptio.

Caput prominulum a thorace diſtinctum inaequale, oculis diſtinctis protuberantibus. Antennae IV, quarum baſes conſtant articulis cylindricis breuioribus, apex vero exit in ſetam longam attenuatam. Os inferne ſitum, inſtructum maxillis hamatis euidentibus. Thorax articulatus oblongus, ſegmentis IV, quorum vnumquodque tuberculis III, ſat eleuatis, medio oblongiore, notatur; vltimum vero ſegmentum, praeter tubercula, cuſpidibus IV dorſum reſpicientibus inſtructum. Dorſum et abdomen conſtant itidem ſegmentis IV, quae ſulcis profundis atque euidentioribus diſtinguuntur.

margo inferior anteriorum ſegmentorum armatur cuſpidibus VI, ratione magnitudinis corporis, validis, vltimum vero ſegmentum, non niſi vnicam cuſpidem in medio gerit. Cauda in formam penicilli efformatur ex laminibus attenuatis mollioribus. Pedes VII parium, quatuor articulis conſtantes. Horum anteriores teneriores, hiſpidi; vltimi vero validiores, femoribus craſſioribus, complanatis, ſpina notatis; abdomen tegunt tria paria appendicum pediformium, baſi ſolidiore ſulcata, apice bifido filiformi. Longitudo totius, exceptis antennis, X linearum; color lateritius; locus, mare album.

---

---

ANTI-

# ANTILOPE SVBGVTTVROSA DESCRIPTA

Auctore

*A. I. GÜLDENSTAEDT.*

Peregrinatores quam plurimi, qui Asiam ac Africam visitauerunt, multa de Gazellis seu Antilopibus, quadrupedibus forma elegantissimis, caprino-ceruinoque generi affinibus reliquerunt, earumque fragmenta & exuvias museis europaeis tradiderunt. Datis hisce insistentes Zoologi systematici species varias numerosissimae huius familiae determinandi ac auctores veteres neotericosque conciliandi studio flagrauerunt, infelici autem semper successu. Tandem illustriss. Comes de *Buffon*, in Tomo 12me *historiae naturalis* tenebras has, cognitionem horum animalium impedientes dissipare, nouamque lucem accendere incoepit, quam postea clariorem reddidit ill. *Pallas*, omnes notas Antilopum seu Gazellarum species systematicorum more, in *primo fasciculo spicilegiorum zoologicorum* exponens atque distinguens, easdemque, post nouissimas curas ill. *Pennant*, de hac quadrupedum stirpe (vid. *Ej. Synopsis of Quadrupeds*) praeclare meriti, in *duodecimo fasciculo* in insigne scientiae naturalis incrementum retractans.

 Zoolo-

Zoologos hosce celeberrimos in speciebus Antilopum determinandis nec simimetipsis vbique satisfacere, nec inter se conuenire, nemini mirum videbitur, qui norit, quam paucas integras viderint, quamque pauciores adhuc dissecauerint. Errores eousque ineuitabiles erunt, donec exstabunt icones, descriptiones, dimensiones atque anatomiae singularum, quales omnibus numeris absolutas ill. *Pallas*, de Antilope Ceruicapra (vid. *fasc.* 1. *spicil. zool.*) atque de Antilope gutturosa & Saiga (vid. *fasc.* 12.) physiophilis communicauit. Reliquae, quas hucusque possidemus, notitiae plerumque adeo incompletae sunt, vt minime sufficiant, ad distinguendas species huius generis arctiori affinitate cognatas.

Hanc difficultatem praesertim expertus sum conferens Gazellam (*Histor. nat. Tom.* 12, *Tab.* 23), Keuellam (l. c. *Tab.* 26) atque Corinnam (l. c. *Tab.* 27.) *Buffonii*, cum illa Antilope, quae campos ad australem caucasi pedem inter mare nigrum & caspium inhabitat, quam interim subgutturosam appello. Descriptiones horum animalium, quas ill. *Daubenton* disquisitionibus criticis *Buffonianis l. c.* addidit, ob defectum indiuiduorum integrorum valdopere mancae sunt; nec vllam anatomicam expositionem, si Corinnae ventriculos excipias, subministrant; nec dimensiones animalis iustas, sed ad exemplar effarctum taliter qualiter factas indicant: hinc ex illis nihil cum certitudine deduci potest. Nam omnes fere notae istorum trium animalium competunt etiam nostrae Antilopi subgutturosae, cornuum magnitudine, ac faciei & reliqui corporis colore, pro aetate varia, haud parum varianti; de qualitatibus autem, quas priuas habet nostra, ignora-

ignoratur, an iis animalia illa tria *Buffoniana* careant ex naturae decreto, an tantum per accidens.

Ad inopias has litterarias remouendas, atque ad facilitandam specierum affinium distinctionem, decreui amplam ac iconibus dimensionibusque illustratam externarum internarumque partium Antilopis subgutturosae descriptionem naturae scrutatoribus tradere, qualem splendidissima *CATHARINAE MAGNAE* munificentia stipatus per Georgiam peregrinator, ex indiuiduis quinque adultis masculis, iussu *serenissimi* HERACLEI, per Cardueliam & Cachetiam regis, mihi mense Ianuario anni 1772 Teflisii oblatis concinnaui, quo in posterum gnari, Arabiam & Palaestinam, atque Africam septentrionalem visitantes, Antilopes seu Gazellas illis terris proprias cum nostra conferre, atque conuenientiam seu diuersitatem absque haesitatione eruere possint. Sed antequam ad descriptionem accedam, liceat quaedam de nomine, de synonymis, ac de qualitatibus animalis nostri praemittere.

Antilope haec subgutturosa dicitur, quia caput laryngis in collo eximie prominet, tantum non adeo ac in Antilope gutturosa *Pallasii*, (vid. *Ej. spicil. zool. fasc.* 12, *Tab.* 2), quae Caprea gutturosa *I. G. Gmelini* (vid. *Nov. Comment. Petrop. Tom.* V. *Tab.* 9.).

Antilope subgutturosa mox describenda communi linguis armenae, georgianae, tataricae, turcicae & persicae, in prouinciis inter mare nigrum & caspium sitis, nomine Dschaïran (джаиранъ) appellatur, a quo Dséren, nomen a Mongolis & Russis in Dauuria Antilopi guttu-

rosae impositum vix differt. Hac nominum barbarorum analogia deceptus *S. G. Gmelinus*, Dschairan Persarum, quem gregatim eminus in via a Baku ad Schamachiam viderat, et habitu fidens pro Cervo Capreolo vix declarauerat, alteri errori obnoxius pro Dséren Mongolorum seu pro Caprea gutturosa patrui sui *I. G. Gmelini* nimis praecipitanter declarauit (vid. *S. G. Gmelini Itiner. Tom.* 3. *pag.* 58.). Antilope seu Caprea gutturosa differt autem euidentissime ab Antilope subgutturosa: cornubus minoribus, lutescentibus, aliter flexis; colore capitis & trunci vniformi, non fasciato; area anali alba vltra caudam extensa; cauda griseo-fuscescente; sinu circa praeputium grumoso; gutture multo eminentiori, seu cartilagine thyreoidea maiore; scoparum in genubus defectu. Haec *S. G. Gmelini* hallucinatio eo magis releuanda est, ne credatur, Antilopem gutturosam *Pall.* ad occidentem maris caspii peruenire, a quo longissime distat. Iam certo certius ex commilitonibus *S. G. Gmelini* scio, illum nunquam Dschaïran Persarum seu nostram Antilopem subgutturosam coram habuisse, sed ceu animal ex illius sententia sat notum neglexisse. Eiusdem fere incuriae reus est *Kämpferus*, in *Amoenitatibus academicis* animal Persis Ahu dictum *pag.* 407 *icone* 1 repraesentans et *pag.* 403 ita describens, vt icon vix recognosci queat. *Icon Kämpferiana* quanquam rudissima sat accedit ad Antilopem subgutturosam, cui forte male nomen Ahu adpositum; nam Persae Antilopem Dschairan appellant; Ahu autem illorum, rectius pro Ceruo Capreolo ecaudato haberi debet, quem *S. G. Gmelin* in *Tomo tertio Itinerarii germanici p.* 496 ex indiuiduo iuniori in prouincia Gilan obtento descripsit, de quo iterum mihi ex commilitonibus illius constat, quod non

non altiſſimos montes, ſed tantum loca ſubmontoſa ſylvatica, vt Cervi ſolent, occupet. De reliquis ſynonymis, quae minus proprie ad me pertinent, eo lubentius taceam, cum iam opus egregium meritiſſimi Göttingenſium profeſſoris, praematura eheu! morte orbi litterato erepti, *Erxlebeni claſſis mammalium*, locupletiſſima ſynonymia abvndans exſtet, quod curioſi etiam in Antilopum genere cum emolumento conſulent.

Patria Antilopes ſubgutturoſae Perſia eſt. Inter mare caſpium & nigrum ſeptentrionem verſus vſque ad pedem auſtralem promontorii iugi alpini caucaſici, vix vltra gradum latitudinis 42 procedit. Ad Cyrum fluuium ab oſtio vſque ad confinia metropolis georgicanae *Teflis* in campis apricis, & planis, & collibus obſitis, ſat frequens eſt, ſyluas omnino reſpuens. Ex variis traditionibus accepi, eandem occidentem verſus vſque ad Conſtantinopolin, auſtrum verſus vsque ad Iſpahanum, orientemque verſus vſque ad Buchariam omnes regiones apricas occupare. Gregatim incedit ſemper, celerrimi curſus terrefacta. Per ſclopetum ex inſidiis vulgo per venatores occiditur. Odor animalis recenter mortui nullus. Caro ſapida, expetita. Pro pabulo ſibi eligit herbas aromaticas, amaricantes, praeſertim Abſinthium ponticum, quo rumen repletum inueni. Parit per Maium, teſte haedillo neonato, quem medio Maii circa Tefliſium, hominum manibus captum, obtinui.

DESCRIP-

# DESCRIPTIO

## Antilopes subgutturosae.

Tab. IX. *Imaginem* animalis, magnitudine naturali octuplo minorem, *Tabula* IX sistit. *Statura*, *magnitudine*, trunci *coloribus*, *pilorumque habitu* maximopere accedit ad Ceruum Capreolum ecaudatum, quem simul occisum coram habui; sed *caput* diuersissimum, quoad cornua praesertim. *Nasus* rectus obtusus, naribus linearibus, diuergentibus, nudis, nigris terminatus. *Rictus* oris angustus, terminalis; *labiis* strictis, nudis, nigricantibus, inferiore aliquantum breuiore. *Mentum* imberbe. *Mystaces* ad latera nasi breuissimae, detritae, paucae. *Oculi* laterales magni, nigricantes; membrana nyctitante ad angulum anticum albida; palpebris strictis, margine nudis, atris; pilis breuibus, raris in medio palpebrae vtriusque, & setis pluribus, breuibus in verruca supraoculari. *Sinus lacrymalis* oblongus, a cantho antico deorsum descendens, labiis tumidis, nigris, nudis, collabentibus, fundo foraminulis octo maioribus perforato & plurimis minimis. *Auriculae* elongatae, cylindricae, acutae, erectae, extus pilis breuissimis vestitae; intus liuidae, ordinibus tribus pilorum rigidiusculorum, alborum obsitae, quibus accedunt ordines pilorum duo ad margines auriculae.

Tab. X. & XI. *Cornua* (*conf. Tab.* X & XI, cranium cum cornubus, magnitudine naturali dimidio minori, sistentes) pedalia, perennia, simplicia, concaua, fusco-nigra, striata; basi tantillum compressa, superficie exteriore planiuscula, interiore conuexa, (vt ex fig. 2 Tab. XI patet, quae perepheriam cornu dextri, magnitudine et crassitie naturali reprae-

repraesentat, superficie exteriore per *a*, interiore per *b* et angulo antico per *c* indicatis); apicem versus teretia, apice laeuia, ceterum annulata; annulis 14 ad 23 (pro varia longitudine inter 8 & 12 poll. paris.); ad basin approximatis, eminentioribus & horizontalibus; apicem versus remotioribus, obsoletioribus, antrorsum obliquis, nonnunquam retrorsum bifidis; omnibus ad marginem posticum subeuanescentibus. Situs cornuum a basi vsque ad annulum vltimum superiorem sursum & retrorsum tendens atque divergens; sed apices laeues introrsum atque antrorsum curvati.

*Collum* compressum, elongatum, capite laryngis euidentissime prominulo, quod etiam in mare neonato avellanae magnitudine protuberat.

An etiam *femina* collo gutturoso & capite cornuto gaudeat, affirmare vel negare nequeo, quia nec femineum indiuiduum obtinere, nec ex incolarum relationibus aliquid sat certo comperire potui. Aiunt equidem, feminas cornubus carere.

*Truncus* oblongus, natibus decliuibus, pectore compresso, abdomine stricto; perinaeum latum, vellere vestitum; scrotum longe pendulum, euidenter bilobum, pilosum; praeputium breue, conicum, pariter pilosum, apice nudiusculo nigro; regio inter scrotum & praeputium media nuda, rubicunda, transuersalis, in qua *papillae mammales* duae, conicae sitae sunt. Vtrinque ad mammas aliquantum retrorsum, in ipsis regionibus inguinalibus *sinus* dantur *caeci*, ex duplicatura cutis orti, nudi, margine circulari patentes, fundo papilloso mucum grumosum lutescentem, hircino foetore imbutum exsudantes.

*Cauda* spithamea, basi teres, dein sursum dysticha, compressa.

*Pedes* graciles subaequales, quorum anteriores antice ad genua *scopis*, seu fasciculo pilorum setaceorum, pollicarium, deorsum pendentium ornati sunt. *Vngulae* in quolibet pede duae, pyramidatae, basi ligamento semipollicem lato connexae, quod retrorsum adscendit & etiam digitorum phalanges connectit, quarum secundae antice disiunctae sunt, ita vt supra ligamentum vngularum fossula triquetra adsit. *Vngulae spuriae* in quolibet pede pariter duae, conico compressae, breues, retrorsum ad primam phalangium flexuram sitae.

De *velleris colore* sequentia valent. *Facies* lutescens, macula in dorso nasi fuscescente picta, & nigro alboque fasciata; litura scilicet vtrinque albida, digitum transuersum lata, ex angulo narium externo seu postico ad canthum oculi internum excurrente; alteraque vtrinque fuscescente eiusdem latitudinis, ex angulo oris ad sinum lacrymalem tendente. Sed hae fasciae, quae in adultis iunioribus, cornubus vix 8 poll. longis & annulis tantum 13 exasperatis, sat euidentes sunt, (vt ex capite magnitudine naturali dimidio minori Tab. XII repraesentato cognoscere licet), in senioribus magis magisque euanescunt, adeo vt in illo indiuiduo, cornubus fere pedalibus, quale Tab. IX sistit, fere nullae sint; tandemque in grandaeuis facies tota vniformiter albida, deletis non solum fasciis, sed etiam exstincta omni lutei tinctura, vt in altero indiuiduo obseruaui, cuius cornua nec longiora, nec pluribus annulis instructa fuerunt, illis Tab. IX exhibitis,

Tab. XII

tis,

tis, sed inter se, & ad annulum vltimum seu supremum, & ad apicem, quoad $1\frac{1}{4}$ poll. magis distabant. Caueant igitur systematici, ne ex faciei colore, pro aetate variabili, notas specificas Antilopum sumant. — *Auriculae* extus albido-lutescentes, intus albae. — Lutescenti-alba sunt *collum subtus* totum a labio inferiori vsque ad pectus, nec non *pedes intus*; — niuea *pectus*, *hypochondria*, *abdomen* totum & *nates*, non vltra caudam; — cinerascenti-brunnea *collum supra* & ad latera, atque *dorsum* totum cum *hypochondriis*, quae fascia longitudinali, albido-lutescenti, digitum transuersum lata, ornata & versus abdominis albedinem vmbra intensiori fuscescenti-brunnea terminata sunt; — *femora* & *crura extus* pariter ac dorsum cinerascenti-brunnea, area in femoribus dilutiori; — *scopae* ad gambas anteriores infra carpi flexuram lutescenti, albido & nigro striatae; — *palmae* & *plantae* ab vngulis spuriis ad vngularum verarum basin vsque, & corona tota vngularum nigrae; — *cauda* tota nigra, in grandaeuis pilis albis variegata.

*Pilorum longitudo* varia; in dorso longissimi, bipollicares; in ventre breuiores; in pedibus, naso & auriculis breuissimi. Tactu pili mollissimi, praesertim in abdomine, totum corpus obuestientes, mammarum & sinuum inguinalium regione tantum nuda.

In *baedillo neonato color* vniformiter fusco-lutescens; pectore, abdomine, atque humeris femoribusque interne niueis; cauda subtus & ad apicem nigricante. Ad vngularum juncturam anticam tantum aliqui pili nigri, ceterum nullibi. Fasciae nec in facie, nec ad hypochondria;

 scopae

ſcopae ad carpum luteae, non nigro ſtriatae. Atque in hoc cornuum tubercula vix protuberantia inter pilos. Guttur auellanae magnitudine prominens in hoc animalculo, ab apice roſtri ad anum 1 ped. 8 poll. longo, & ad pedes anticos 1 ped. 5 poll. ad poſticos autem 1 ped. & 6 poll. alto, longitudine caudae $4\frac{3}{4}$ poll. & auricularum $3\frac{1}{2}$ poll. menſurae ſemper pariſinae.

Hiſce ſubiungam *dimenſiones partium externarum* Antilopes ſubgutturoſae adultae ſenioris, quae ſequuntur:

| | poll. | lin. |
|---|---|---|
| Longitudo ab apice roſtri ad anum in linea recta - - - - - - - | 40 | — |
| Longitudo capitis a roſtro ad occiput - - | 9 | — |
| Circumferentia roſtri pone nares - - | 6 | 9 |
| Circumferentia oris - - - - | 5 | — |
| Diſtantia inter nares inferne - - - | — | 4 |
| Diſtantia inter nares ſuperne - - - | 1 | 4 |
| Diameter inter canthos oculi - - - | 1 | 3 |
| Diameter perpendicularis inter palpebras - - | 1 | — |
| Diameter inter roſtrum & canthos anticos - | 4 | 10 |
| Diameter inter canthos poſticos & aurem - | 2 | 9 |
| Diameter inter canthos anticos in linea recta. - | 3 | — |
| Diameter eadem in linea curua - - - | 3 | 9 |
| Diameter ſinuum lacrymalium - - - | — | 10 |
| Profunditas eorum - - - - | — | 10 |
| Diameter inter angulum ſuperiorem ſinuum lacrymalium & canthum anteriorem oculi - - - - - | — | 5 |

Diame-

| | poll. | lin. |
|---|---|---|
| Diameter inter angulum inferiorem ſinuum lacrymalium & canthum anteriorem oculi - - - - - | — | 10 |
| Diſtantia inter baſes cornuum interne - - | — | 4 |
| Diſtantia inter baſes cornuum externe - - | 2 | 8 |
| Diſtantia inter cornua maxima - - - | 7 | — |
| Diſtantia inter apices cornuum - - | 6 | 6 |
| Longitudo cornuum in linea recta - - | 11 | 4 |
| Longitudo cornuum in linea curua antica - | 13 | 6 |
| Longitudo apicis laeuis cornuum - - | 2 | 4 |
| Peripheria capitis ante cornua - - - - | 15 | — |
| Longitudo auricularum a vertice ad apicem - | 5 | 2 |
| Diſtantia inter baſes auricularum - - | 3 | — |
| Longitudo colli a gula inflexa ad ſterni caput | 10 | — |
| Circumferentia colli ad gulam - - - | 15 | — |
| Circumferentia colli ad ſternum - - | 17 | — |
| Diameter perpendicularis colli in medio - | 5 | 6 |
| Circumferentia corporis pone pedes anticos - | 27 | 6 |
| Eadem ad proceſſum xyphoideum - - | 29 | — |
| Eadem ante pedes poſticos - - - | 25 | 6 |
| Diameter perpendicularis corporis ad apicem ſterni - - - - - | 11 | — |
| Longitudo caudae ab ano ad apicem oſſis coxygis - - - - - - | 7 | — |
| Longitudo eiusdem ad apicem pilorum extimorum - - - - | 9 | 6 |
| Longitudo a capite ſterni ad apicem - - | 11 | — |
| Longitudo ab apice ſterni ad praeputium - - | 7 | — |
| Longitudo a praeputio ad lineam transuerſalem mammalem - - - - | 2 | 9 |



Longi-

| | poll. | lin. |
|---|---|---|
| Longitudo a linea transuerſali mammali ad ſcrotum - - - - | 1 | 2 |
| Longitudo a ſcroto ad anum - - - | 5 | 3 |
| Longitudo ſcroti - - - - - | 2 | 9 |
| Latitudo ſcroti - - - - | 2 | 6 |
| Craſſitudo ſcroti - - - - | 1 | 5 |
| Diſtantia inter mammarum papillas - - | 1 | 3 |
| Diſtantia inter ſinus inguinales - - - | 2 | — |
| Diameter ſinuum inguinalium - - - | — | 10 |
| Profunditas ſinuum inguinalium - - - | — | 10 |
| Altitudo perpendicularis ab interſcapulio ad apicem vngularum anticarum - - | 26 | 6 |
| Longitudo cubiti - - - - | 7 | 2 |
| Circumferentia cubiti - - - | 3 | 3 |
| Longitudo gambae anterioris - - - | 6 | — |
| Circumferentia gambae minima - - | 2 | 2 |
| Longitudo phalangum pedum anteriorum - | 2 | 6 |
| Longitudo vngularum verarum ad marginem anticum - - - - | 2 | 2 |
| Longitudo ab vngulis ſpuriis ad baſin verarum | 1 | 6 |
| Latitudo vngularum verarum anteriorum - - | 1 | 2 |
| Altitudo a lumbis ad apicem vngularum poſteriorum - - - - | 28 | 6 |
| Longitudo cruris a patella ad calcaneum - - | 10 | — |
| Longitudo gambae poſterioris a calcaneo ad vngulas ſpurias - - - | 9 | — |
| Longitudo phalangum poſteriorum - - | 2 | 6 |
| Longitudo vngularum verarum poſteriorum ad marginem anticum - - - - | 1 | 3 |

Longi-

| | poll. | lin. |
|---|---|---|
| Longitudo ab vngulis spuriis posticis ad basin verarum - - - - | 1 | 2 |
| Latitudo vngularum verarum posteriorum - | — | 11 |

# ANATOMIA
## Antilopes subgutturosae.

*Buccae interne* papillis conicis acuminatis obsitae, quarum anteriores liuidae, posteriores albae. Dimidia antica *palati* pars rugis transuersis duodecim exarata; quae aequales & planae, lineola intermedia disiunctae & situ ad hanc alternae; ante primam rugam tuberculum rhombeum; margo anterior palati rotundatus, obtusus, edentulus, niger; postica palati pars alba, laeuis.

*Dentes incisivi* inferiores octo, intermediis duobus latissimis, cestriformibus, vtrinque subsequentibus dimidio angustioribus, vtrinque duobus extimis linearibus angustissimis, longitudine omnes aequales & apice scindentes, (vid. Tab. XI fig. 3, quae crus maxillae inferioris sinistrum repraesentat). *Dentes canini* nulli; *molares* remoti, supra infraque sex vtrinque, truncati, rugosi; inferiorum primus seu anterior acutus et simplex, secundus & tertius obsolete bilobi, quartus & quintus euidenter bilobi, sextus trilobus; superiorum tres primi simplices, tres vltimi seu posteriores bilobi, (vt ex fig. 1 & 3 Tab. XI patet).

*Lingua* oblonga, latitudinis pollicaris vbique aequalis, a ligamento sublinguali ad apicem sesquipollicem, a basi ad apicem quinque pollices longa; apice obtuso, nigro,

gro, tenui, laevi; medio papillis conicis, rigidis, magnis, in triangulum dispositis exasperata; ad baseos latera papillis nonnullis calyculatis obsita.

*Epiglottis* cordiformis, apice et marginibus antrorsum reflexis. *Ossis hyoïdei* corpus sphaerico-triangulum, cartilagineum, pollicem latum, horizontale, interstitio superiori alarum cartilaginis thyreoïdeae respondens et ad angulos eiusdem posteriores duobus cruribus auctum, quorum vnum inferius, alterum superius; crus inferius ossis hyoïdei perpendiculariter ad margines laterales cartilaginis thyreoïdeae descendens, vix duos pollices longum, apice cartilagineum et acuminatum; crus superius horizontaliter ad vertebras colli procedens, quatuor pollices longum, triarticulatum, articulo primo pollicari, secundo vix semipollicari, tertio fere tripollicari et apice bifido.

*Cartilago thyreoïdea* integra, perfecte nasiformis, apice obtuso valde prominulo, diametro longitudinali trium pollicum, transuersali ab apice ad partem posticam 2¼ poll. exinde guttur tuberosum, apice huius cartilaginis sesquipollicem ante arteriam asperam prominente. *Cartilagines aritenoïdeae* & *cricoïdea* nil singularis habent. Trachea diametro pollicari, ex annulis cartilagineis, tres lineas latis composita, quorum extremitates postice membrana duas lineas lata connectuntur. Haec omnia oculis lectoris exhibet figura 4 Tabulae XI, quae caput laryngis Antilopes subgutturosae adultae magnitudine naturali repraesentat: *A* margo posticus alae sinistrae cartilaginis thyreoïdeae, ab altero dextro interuallo duorum pollicum distans; *G* margo superior cartilaginis eiusdem, cui corpus ossis hyoïdei in

in situ naturali incumbit; *B* apex eiusdem cartilaginis sub gula prominens et collum subgutturosum reddens; *D* rima glottidis, musculis cricothyreoïdeis remotis conspicua; *C* pars antica cartilaginis cricoïdeae; *F* annuli tracheae.

*Glandulae thyreoïdeae* duae, vtrinque solitarie infra marginem cartilaginis cricoïdeae sitae, lateribus tracheae incumbentes, brunneae, tenues, oblongae, pollice breuiores, semipollice angustiores, quarum sinistra sub littera *E* fig. cit. exhibita est. —— Sub sinu lacrymali supra descripto, ante oculos in fouea anteorbitali, (quam sub litteris *r, s* in Tab. X et in Tab. XI fig. 1 videre licet), sita est *glandula* ouata, iuglandis minoris magnitudine, tunica musculari externe vestita, substantia stipata, muco sebaceo-grumoso nigricante scatens, qui e foraminulis in fundo sinus obuiis digitis exprimi potest; hinc male *sinus*, lacrymalis dicitur, rectius *anteorbitalis* dicendus. *Lacrymarum glandulae* solito modo in orbita sitae sunt, earumque ductus in marginibus palpebrarum hiant. —— Sub *sinubus inguinalibus*, (quorum situm *Tabula* XXIV *Tomi* XII *Hist. natur. Buff.* bene exprimit), glandula conglobata nulla, sed sub cute *glandulae solitariae*, seminis miliacei magnitudine, substantiam grumosam, luteam, hircine foetentem exsudantes.

*Pulmo dexter* quinquelobus; lobi quatuor longitudinaliter ad spinam siti, vltimo diaphragmati incumbente maximo, reliquis subaequalibus, quinto inter maximum hunc et cor collocato omnium minimo. *Pulmo sinister* bilobus, lobo superiore longissimo et sinuato. Hinc septem lobi pulmonales euidentissimi et octauus obsoletus. *Cor* in

 me-

medio pectore situm sub osse sterni, apice vix sinistrorsum spectante, quatuor pollices longum, acuminatum. *Diaphragmatis* speculum ouatum, septem pollices latum.

*Situs viscerum abdominalium* remotis tunicis obseruatur ita: in regione iliaca et inguinali sinistra rumen, fundo in ipsa pubis regione, et sub hoc supra cristam ossium pubis fundus intestini caeci; in regione iliaca dextra sub costis curuaturae duae transuersales coli; infra has ad regionem inguinalem dextram vsque, per omnem regionem epigastricam et vmbilicalem gyri intestinorum tenuium, quorum extrema pars ipsam peluim replet; cardiacam regionem occupant ventriculi secundarii; lien in imo hypochondrio sinistro rumini arcte adhaeret; hepar fundum hypochondrii dextri adimplet, vix in epigastrium pergens, diaphragmati et spinae dorsali per ligamentum coronarium adnexum, deficiente ligamento lato suspensorio.

*Hepar* rotundatum, bilobum, lobo dextro maiore; accedente lobulo triquetro, tres pollices longo, ad lobum dextrum subtus obuio; latitudo hepatis a margine dextro ad sinistrum octo pollicum, a margine antico ad posticum quinque pollicum; crassitudo maxima decem lineas non exsuperat.

*Vesicula fellea* subtus in medio lobi dextri hepatis sita, sesquipollicem longa, angusta, collapsa, bile carens, muco tantum lutescente amaricante parietibus adhaerente, vt in tribus indiuiduis adultis obseruaui. Hinc etiam ex hoc titulo, inter Ceruos & Capras haec Antilopum species medium tenet.

Lien

*Lien* patelliformis, fere ſex pollices longus, quatuor pollices latus, ſemipollicem craſſus, margine obtuſiori vsque ad medium ſuperficiei inferioris rumini adhaerens.

*Ventriculorum* Antilopes ſubgutturoſae figura & proportio omnino eadem, quae Corinnae *Buffonii* et *Daubentoni*, ſecundum *tab.* 28 et 29 *Tomi* 12 *Hiſt. natur.*, propria eſt. *Rumen* bituberculatum, inciſura tres pollices profunda ſinuatum, a cardia ad fundum inferiorem tredecim, et ad fundum ſuperiorem decem pollices longum. Tunica interna ruminis facillime ſecedens papilloſa; papillis ad inciſuram minimis tuberculatis, in fundis 2½ lineas longis et vnam lineam latis, reticulum verſus longiſſimis, ſemipollicem adaequantibus, latitudine ſemper lineari, apice rotundo, ſubſtantia tenui compreſſa. *Reticulum* paruum, ſphinctere a cardia ruminis vix ſex pollicum interuallo diſtante, ſuperficie interna hexagonis, diametro ſemipollicari atque lateribus vnam lineam altis, papillulis breuiſſimis echinatis, cancellata. *Omaſus* ouato-acuminatus, tres pollices longus, diametro vix bipollicari, lamellis latiſſimis vnum pollicem altis, papillulis iis reticuli analogis ſed duplo longioribus muricatis. *Abomaſus* ſex pollicum longitudine, diametro ad omaſum quatuor, ad pylorum vnius pollicis; rugis internis laeuibus, raris, latiſſimis vnum pollicem altis. Nec aegagropilas, nec concreta bezoartica in indiuiduis tribus maſculis diſſectis vidi; nec ab incolis, quod alias inueniantur, comperi.

*Inteſtinum tenue* 571 pollices longum, diametro pollicari; *caecum* 11 pollices longum, diametro ſeſquipollicari; *colon* cum *recto* 207 pollices longum, diametro cum

coeco aequali; scybala in recto ouata, ouinis similia. *Pancreas* difforme, duodeno adnexum.

*Renes* figurae humanae, dextro duobus pollicibus altiore in situ naturali; longitudo eorum 2½ poll., latitudo 1½ poll., crassitudo 1 poll.; substantia duplici et hilo renali sat euidentibus. *Renes succenturiati* difformes, tenues, albidi, parui. *Vesica vrinaria* ouata, tres pollices longa, in imo fundo peluis reposita.

*Testiculi* ouati duos pollices longi et fere sesquipollicem crassi. *Epidydymis* cylindrica, diametro semipollicari, ad marginem internum testis decurrens et ad extremitatem inferiorem tuberculo semipollicari prominens. *Vesiculae spermaticae* oblongae, depressae, semiarcuatae, sesquipollicem longae, septem lineas latae, duas lineas crassae, ex intestinulo gyratim inflexo conflatae. *Vas deferens* duodecim pollices longum. *Bulbus vrethrae* cylindricus, crassissimo musculo vestitus, tres pollices longus, diametro octo linearum. *Penis* cylindrico-compressus, quatuor linearum diametro, ab angulo conuergentiae radicum corporum cauernosorum ad apicem glandis duodecim pollices longus, in medio in figuram S romani retrorsum curuatus per musculum gracilem a perinaeo procedentem. *Glans* penis cylindrico-acuminata, vix trium linearum diametro, vnum pollicem et octo lineas longa, apice obtusiusculo, laeui, ex quo *vrethra* tenuissima longitudine trium linearum libere propendet. *Praeputium* margine extimo ad sex pollices retractile, et circa marginem eundem interne tuberculis callosis, albidis, semine milliaceo maioribus obsitum. *Prosta-*

tae

tae vtrinque ad bulbi vrethrae extremitatem anteriorem sitae, compresso-ouatae, octo lineas longae.

*Sceleton* Antilopes subgutturosae simillimum sceleto Gazellae *Buffonianae*, quod Tabula XXV Tomi XII *Hist. natur.* repraesentat. In ossibus trunci & extremitatum differentiae minimae, quas suo loco enumerabo. Nec puto, illa in congeneribus magis discrepare. Sed cranii ossa, quoad figuram & proportionem, imo numerum probabiliter in speciebus veris huius generis adeo differunt, vt pariter ac in adfini ouillo & caprino genere in determinandis differentiis specificis vtiliter adhiberi possint. Hinc curaui, vt conficiantur icones cranii, faciem anticam (Tab. X) et lateralem (Tab. XI fig. 1) oculis exhibentes magnitudine naturali dimidio tantum minores, quia dimensiones figurarum *Buffonianarum* nimis paruae sunt, adeo vt singula ossa eorumque suturas distinguere non liceat. In iconibus his nostris sequentia notatu digniora sunt: *b* ossa rostri; *c* ossa maxillae superioris dentes molares suscipientia, foramine infraorbitali *d* perforata; *e* conchae nasi, extremitatibus anterioribus in narium cauitatem prominentes, vomere separatae; *l* margo e iunctura ossium rostri ortus, pro adhaesione septi narium cartilaginei inseruiens; *f* ossa nasi, conchis ad margines externos conspicuis; *g* ossa frontis, cornuum radicibus aucta et foraminibus supraorbitalibus *i* pertusa; *h* os verticis vnicum; *m* os occipitis cum apophysibus candyloidea *n* et mastoidea *o*; *k* pars squamosa et *q* pars petrosa ossis temporum, cum apertura auris *p*; *r* ossa zygomatica; *s* ossa lacrymalia, quorum pars inferior cum parte superiori ossis zygomatici fossam pro glandula illa supra descripta anteorbitali constituit,

tuit, quae fossae in craniis ouillis obseruabili perfecte analoga, sed aliquantum profundior est.

Vertebrae colli 7, processubus spinosis breuioribus quam in Gazella, iisque Corinnae (vid. Tab. XXX Tomi XII. *Hist. nat. Buff.*) similibus, processu epistrophaei non dentiformi, sed semiannulari; vertebrae dorsi 13, processubus spinosis illis Gazellae (vid. Tab. XXV Tomi XII l. c.) aequalibus; vertebrae lumborum 6, processubus spinosis non antrorsum inclinatis, vt in Gazella, sed perpendicularibus, vt in Corinna; vertebrae ossis sacri spuriae 4; vertebrae ossis coxygis 12, quarum Cel. *Daubenton* in Gazella tantum 10 numerauit, vltimis tenuissimis forte deperditis. Costae 13, quarum 8 verae, 5 spuriae. Ossis sterni articuli 6, vltimo latissimo quadrato in processum xyphoideum triquetrum truncatum abeunte, qui cartilagine rotundata, plana, tenuissima terminatur. Cubitus, in medio praesertim, tenuior adhuc quam in Gazella *Buffoniana* atque adeo arcte cum radio coalitus, vt nil nisi crista radii esse videatur, quae infra extremitatem superiorem radii ad pollicis longitudinem rima tenui separata est.

Addamus dimensiones cranii Tab. X & XI repraesentati, nec non trunci & extremitatum, quo sceleton integrum animalis, cuius mensurae externarum partium illis, quas antea dedimus, perfecte aequales erant, secundum proportiones illi proprias innotescat, adhibito semper pede *parisino* in duodecim pollices diuiso, atque pollice 12 lineas continente.

Longi-

| | poll. | lin. |
|---|---|---|
| Longitudo in linea recta ab rostri extremitate ad superficiem anticam radicis cornuum | 5 | 10 |
| Longitudo in linea recta a superficie antica radicis cornuum ad foramen occipitis - | 3 | 10 |
| Longitudo ab extremitate ossium rostri ad apicem processus mastoidei in eodem plano horizontali situm - - - - | 7 | 3 |
| Latitudo frontis maxima inter orbitarum margines superiores - - - - | 3 | — |
| Latitudo capitis maxima inter margines posticos orbitarum - - - - | 3 | 10 |
| Distantia inter apices processuum mastoideorum | 2 | 1 |
| Distantia inter zygomata - - - | 3 | 2 |
| Distantia inter dentes molares superiores vltimos - - - - | 2 | 1 |
| Distantia inter dentes molares medios - - | 2 | 2 |
| Distantia inter dentes molares anteriores - - | 1 | 4 |
| Latitudo ad extremitatem ossium rostri - - | — | 8 |
| Diameter inter aperturas aurium - - | 2 | 7 |
| Diameter perpendicularis inter ossa palati & marginem anteriorem ossis frontis - | 2 | 3 |
| Longitudo ab extremitate ossium rostri ad extremitatem anteriorem ossium nasi - | 2 | 4 |
| Longitudo ossium nasi - - - - | 2 | 1 |
| Diameter foraminis atlantis perpendicularis - | — | 5 |
| Diameter eiusdem transuersalis - - - | — | 9 |
| Longitudo corporis epistrophaei, qui vertebrarum longissimus - - - - | 2 | 1 |

Longi-

| | poll. | lin. |
|---|---|---|
| Longitudo processus semi-annularis epistrophaei | — | 4 |
| Altitudo processus spinosi per totum epistrophaeum decurrentis - - - - | — | 9 |
| Longitudo vertebrarum dorsi, subaequalium inter se - - - - - | — | 9 |
| Longitudo spinosi vertebrae dorsalis tertiae processus, qui omnium longissimus - - | 3 | 2 |
| Longitudo vertebrae lumborum quintae - - | 1 | — |
| Longitudo transuersi vertebrae lumborum quintae processus, qui omnium longissimus | 1 | 8 |
| Longitudo ossis sacri - - - - | 2 | 9 |
| Latitudo ossis sacri maxima ad extremitatem dorsalem - - - - - - | 2 | 11 |
| Latitudo ossis sacri minima ad extremitatem caudalem - - - - - | — | 11 |
| Longitudo vertebrarum ossis coxygis subaequalium - - - - - - | — | 9 |
| Diameter peluis inter symphysin pubis et angulum ossis sacri - - - - | 3 | 10 |
| Diameter peluis transuersalis superior - - | 2 | 4 |
| Longitudo ossium innominatorum maxima - | 7 | 4 |
| Longitudo costae primae, quae breuissima - | 3 | 10 |
| Longitudo costae nonae, quae longissima, in linea recta - - - - | 7 | 7 |
| Latitudo costae quintae, quae latissima - - | — | 8 |
| Latitudo costae decimae tertiae quae angustissima - - - - - | — | 3½ |
| Longitudo ossis sterni - - - - | 8 | 8 |
| Latitudo sterni maxima ad processum xyphoideum - - - - - | 1 | 7 |

Longi-

| | poll. | lin. |
|---|---|---|
| Longitudo ſcapulae ad marginem ſuperiorem - | 5 | — |
| Longitudo eiusdem ad marginem inferiorem - | 5 | 3 |
| Longitudo baſeos ſeu marginis poſterioris - - | 8 | — |
| Altitudo maxima ſpinae ſcapulae - - - | — | 8 |
| Longitudo oſſis humeri - - - - - - | 5 | 3 |
| Diameter eius minima - - - - - | — | 7 |
| Longitudo cubiti cum olecrano - - | 7 | 2 |
| Longitudo olecrani - - - - | 1 | 10 |
| Longitudo radii - - - - - | 6 | — |
| Longitudo carpi - - - - - | — | 8 |
| Diameter carpi - - - - | — | 11 |
| Longitudo gambae anterioris - - - | 6 | 5 |
| Diameter transuerſalis gambae anterioris in medio - - - - - | — | 6 |
| Longitudo phalangis primae anterioris - - | 1 | 7 |
| Longitudo phalangis ſecundae anterioris - - | — | 10 |
| Longitudo phalangis tertiae anterioris - - | — | 10 |
| Longitudo femoris - - - - | 6 | 8 |
| Longitudo patellae - - - - - | 1 | — |
| Latitudo patellae - - - - | — | 9 |

| | poll. | lin. |
|---|---|---|
| Longitudo cruris - - - - | 8 | — |
| Longitudo tarsi - - - - | — | 9 |
| Latitudo transuersalis tarsi - - - | — | 11 |
| Longitudo calcanei - - - - | 2 | — |
| Longitudo gambae posterioris - - - | 7 | 4 |
| Diameter transuersalis gambae posterioris in medio - - - - - | — | 6 |
| Longitudo phalangis primae posterioris - - | 1 | 3 |
| Longitudo phalangis secundae posterioris - - | — | 9 |
| Longitudo phalangis tertiae posterioris - - | — | 11 |

ASTRO-

# ASTRONOMICA.

# OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES
## FAITES À GENEVE

par

J. A. MALLET.

Les obſervations que j'ai l'honneur de préſenter à l'Illuſtre Académie des Sciences, ſont 11 occultations d'étoiles par la Lune faites à Genève dans mon obſervatoire dans les années 1775, 1776 & 1777. M. *Jean Trembley* & *Marc. Pictet* mes compatriotes très verſés dans l'aſtronomie, ont fait avec moi la plûpart de ces obſervations, & m'ont beaucoup aidé auſſi dans les calculs dont je donne ici les principaux réſultats. Les Elémens du calcul ont été pris dans les Tables de la Lune & du Soleil de *Mayer* imprimées à Londres en 1770; il n'y a que l'obliquité de l'écliptique qui pour les trois premieres obſervations ſeulement, a été priſe dans la Connoiſſance des Temps. La différence des méridiens de Genève & Greenwich a été ſuppoſée pour ces trois premieres obſervations de 24′. 6″ de temps, & pour les ſuivantes de 24′. 16″.

Mm 3 Les

Les parallaxes de longitude & de latitude de la Lune ont été calculées par la methode de Mr. *Lexell*, suivant les formules qu'il a données dans les Ephemerides de Berlin de 1777. La position des étoiles a été prise dans le Catalogue de *Bradley* imprimé dans le Nautical-Almanach de 1773, & dans celui de *la Caille* qui est dans *l'Astronomiae Fundamenta*. Lorsque l'étoile s'est trouvée dans les deux catalogues, on a pris une moyenne entre les deux positions données par ces deux auteurs.

Cette position a été reduite au moment de l'observation, par les formules ordinaires de précession, d'aberration & de nutation, & en outre on a fait usage des dernieres formules données par Mr. *de la Grange* dans le Recueil des Tables astronomiques de Berlin, pour calculer la variation séculaire en longitude & latitude.

Le résultat de tous ces calculs est le tems vrai de la Conjonction, & l'erreur des Tables de la Lune. L'un & l'autre ont été calculés séparément pour l'Immersion & l'Emersion suivant la methode de Mr. *Lexell*, en faisant usage de la latitude de la Lune prise dans les Tables, & on a ajouté à la suite du temps trouvé pour la Conjonction, la quantité dont il doit varier pour une petite correction faite au diametre de la Lune, à sa latitude, & à sa parallaxe horizontale, corrections que l'on pourra déterminer par la comparaison de la même occultation observée dans différens endroits, comme Mr. *Lexell* l'a fait avec beaucoup de sagacité dans plusieurs observations, & surtout pour celle de l'eclipse de Soleil de 1769. $\delta$ désigne le nombre de secondes, dont il faut augmenter le rayon de la Lune,

Lune, $\eta$ l'augmentation de sa latitude, & $\pi$ de sa parallaxe horizontale. Ces corrections produisent aussi un changement dans l'erreur de la longitude de la Lune donnée par les Tables : ce changement est le même que celui qu'on a trouvé pour le temps de la conjonction & qu'on reduit en secondes de degré, mais il peut avoir un signe différent. Ainsi par exemple dans la 3ᵉ observation, on trouve pour l'Immersion le temps de la Conjonction de Regulus à $14^h\ 11'\ 0'',6 + (2,26\ \delta + 0,974\ \eta - 0,00\ \pi)''$, & en appellant $\Phi''$ la somme des trois derniers termes composés de $\delta$, $\eta$, & $\pi$, on aura $52'',4 + 0,49\ \Phi''$ pour le nombre de secondes dont la longitude de la Lune, calculée par les Tables, est trop grande.

Par l'Émersion de la même occultation l'erreur des Tables en longitude est $54,''6 - 0,49\ \Phi''$ (en désignant ici par $\Phi''$, la variation $- 2,24\ \delta - 0,93\ \eta + 0,00\ \pi$ trouvée pour le temps de la conjonction déterminée par cette Émersion).

Lorsque l'Immersion & l'Émersion ont pu être toutes les deux observées, nous avons encore calculé le temps de la conjonction & l'erreur des Tables en longitude & latitude, par une autre methode qui n'employe pas la latitude absolüe de la Lune, mais seulement les mouvemens de la Lune en longitude & latitude pendant la durée de l'occultation; cette methode est celle que Mr. *de la Lande* a donnée dans son Astronomie.

G I représente l'ecliptique, S le lieu de l'étoile, L le centre apparent de la Lune affectée de la parallaxe, au mo- Tab. XIII. Fig. 1.

moment de l'Immersion, F son centre au moment de l'Émersion, F A & D E deux parallèles à l'ecliptique, D G, S H & E I des perpendiculaires à l'ecliptique; ensorte que F L sera le mouvement de la Lune sur son orbite apparente pendant l'occultation, A F L l'angle d'inclinaison de l'orbite apparente. H I la différence des longitudes apparentes de la Lune au moment de l'Immersion & au moment de la Conjonction & E L la différence des latitudes apparentes de l'étoile & de la Lune au moment de l'Immersion. Après avoir donné la valeur de ces quatre quantités calculées, nous en avons tiré les trois resultats importants, le temps de la conjonction & l'erreur des Tables en longitude & latitude.

## I. Observation.

Émersion de Regulus, de la partie obscure de la Lune observée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 12 Decembre 1775 à $10^h. 27'. 57''. 8$ temps vray.

## Calcul.

Différence des méridiens supposée entre Genève & Paris $14'. 50''$. de temps.
- - entre Genève & Greenwich $24'. 6''$.

| | |
|---|---|
| Longitude du ☉ calculée par les Tables de *Mayer* - - | VIII$^s$.20°.48'.11''.5. |
| Ascension droite du ☉ - - - | VIII. 19. 59. 25. 2. |
| Obliquité de l'écliptique prise dans la Connoissance des temps - - | 23. 27. 49. |
| Longitude vraye de la ☾ calculée par les Tables de *Mayer* - - - | IV. 26. 9. 58. 6. |

Lati-

| | |
|---|---|
| Latitude vraye boréale de la ☾ - | - 0°.48′.56″.9. |
| Mouvement horaire de la ☾ en longitude - - - - - | - - 29.28, 9. |
| Mouvement horaire de la ☾ en latitude - - - - - | - - 2.37, 0. |
| Parallaxe horizontale aequatorienne de la ☾ - - - - | - - 54.20, 1. |
| Diamètre horizontal de la ☾ - | - - 29.36, 7. |
| Diamètre de la ☾ augmenté à cause de son élévation - - - | - - 29.40, 4. |
| Parallaxe dont la longitude vraye de la ☾ est augmentée - - | - - 48.30, 7. |
| Parallaxe dont la latitude vraye de la ☾ est diminuée - - | - - 23. 6, 0. |
| Longitude apparente de Regulus tirée des Catalogues de *la Caille* & de *Bradley* - | IV$^s$. 26.42.52, 8. |
| Latitude apparente boréale de Regulus | - 0.27.34, 7. |

## Resultat.

Temps vrai de la Conjonction le 12 Decembre 1775 à $11^h.36'.42''.3 - 2,05\,\delta - 0,24\,\eta + 1,92\,\pi$.

Erreur dont la longitude de la ☾ calculée par les Tables de *Meyer* est trop grande $= 52''.4 + 0',49\,\Phi'$.

## 2. Observation.

Immersion de Regulus, dans la partie obscure de la Lune, observée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 3. Mars 1776 à $5^h. 42'. 17''. 5$ Temps vray.

## Calcul.

Différence des méridiens supposée
entre Genève & Paris de $14'. 50''$ de temps.
entre Genève & Greenwich de $24'. 6''$ de temps.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Obliquité de l'ecliptique prise dans la connoissance de temps - - | | | $23°. 27'. 49''$. |
| Longitude du ☉ - - - | Par les Tabl. de *Mayer*. | XI$^s$. | 13. 46. 22, 6. |
| Ascens. droite du ☉ - - - | | XI. | 15. 3. 7, 7. |
| Longit. vraye de la ☾ - - - | | IV. | 25. 44. 26, 2. |
| Latit. vraye boréale de la ☾ - - | | - - | 0. 56. 15, 0. |
| Mouv. horiz. de la ☾ en longit. - | | - - | 29, 30, 3. |
| Parallaxe horiz. aequator. de la ☾ | | - - | 54. 7, 3. |
| Diamètre horiz. de la ☾ - - | | - - | 29. 29, 7. |
| Diamètre de la ☾ augmenté - | | - - | 29. 37, 8. |
| Parallaxe dont la longit. vraye de la ☾ est augmentée - - - - | | - - | 46. 51, 9. |
| Parallaxe dont la latit. vraye de la ☾ est diminuée - - - | | - - | 21. 19, 8. |
| Longit. appar. de Regulus tirée de *Bradley* & de la *Caille* - - | | IV. | 26. 43. 15, 2. |
| Latit. appar. - id. - - - - | | - | 0. 27. 35, 1. |

## Resultat.

Temps vrai de la Conjonction le 3 Mars 1776 à $7^h. 43'. 46''. 2 + 2. 34\,\delta - 1. 16\,\eta + 2. 22\,\pi$.

Erreur dont la longit. de la ☾ par les Tables de *Mayer* est trop grande $= 55''. 2 + 0, 49\,\Phi'$.

3. Ob-

## 3. Observation.

Occultation de Regulus par la Lune, observée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 30 Mars 1776.

Immersion dans la partie obscure à $14^h. 29'. 9''.4$ } Temps vray.
Emersion de la partie éclairée à 15. 23. 47. 8 }

## Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris supposée de $14'. 50''$ de temps.
de Genève & Greenwich supposée de $24'. 6''$ de temps.

| | | Pour l'Immers. | Pour l'Emers. |
|---|---|---|---|
| Obliquité de l'eclipt. prise dans la connoissance des temps - - | | - $23°.27'.49''$. | - - - |
| Longitude du ☉ - - - - | Par les Tabl. de *Mayer*. | $0^s$. 10.56. 9.0. | $0^s$. $10°.58'.23''.6$. |
| Ascens. droite du ☉ - - | | 0. 10. 3. 2.9. | 0. 10. 5. 7.1. |
| Longitude vraye de la ☾ - - | | IV. 26.53. 0.0. | IV. 27.19.49.9. |
| Latitude vraye de la ☾ boréale | | - 1. 7.45.9. | - 1.10. 6.5. |
| Mouvement hor. de la ☾ en longit. | | - - 29.27.0. | - - 29.26.9. |
| Mouvement hor. de la ☾ en latit. | | - - 2.34.4. | - - 2.34.1. |
| Parallaxe horiz. aequator. de la ☾ | | - - 54.11.7. | - - 54.11.6. |
| Diamètre horiz. de la ☾ - - | | - - 29.32.1. | - - 29.32.1. |
| Diamètre de la ☾ augmenté - | | - - 29.40.3. | - - 29.35.9. |
| Parallaxe dont la longit. de la ☾ est diminuée - - - - | | - - 22.18.3. | - - 22.15.1. |
| Parallaxe dont la latitude de la ☾ est diminuée - - - - | | - - 46.33.4. | - - 48.41.9. |
| Longitude appar. de Regulus tirée de *Bradley & de la Caille*. - - | | IV. 26.43.13.2. | - - - |
| Latitude appar. de Regulus id. - - | | - 0.27.35.1. | - - - |

 Re-

## Resultat.

Par l'Immersion: Temps vray de la Conjonction
le 30 Mars à $14^h. 11'. 0''. 6 + 2,26\,\delta + 0,97\,\eta - 0,005\,\pi$.
Par l'Emersion: Temps vray de la Conjonction
le 30 Mars à $14^h. 11'. 3''. 3 - 2,24\,\delta - 0,93\,\eta + 0,004\,\pi$.
Par un milieu entre l'Immersion & l'Emersion
le 30 Mars à $14^h. 11'. 2''. 0 + 0,01\,\delta + 0,02\,\eta + 0,00\,\pi$.
Erreur dont la longitude de la ☾ par les Tables
de *Mayer* est trop grande $\begin{cases} 52''. 4 + 0,49\,\Phi'' \text{ par l'Imm.} \\ 54''. 6 - 0,49\,\Phi''. \text{ par l'Emerf.} \end{cases}$

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. *de la Lande* on trouve:

Mouvement de la ☾ sur l'orbite appar. pendant l'occultation $FL = 0°. 26'. 53''. 1$.

Inclinaison de l'orbite appar. $AFL = 0°. 25'. 47''. 3$.

Distance de l'Immers. à la Conjonct. appar. $HI = 13'. 24''. 9$.

Différence des latitudes apparentes de la ☾ & de l'étoile, pour l'Immersion $EL = 6'. 20''. 1$.

D'où resulte le Temps de la Conjonct. vraye à $14^h. 11'. 2''. 6$.

L'Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longitude de la ☾ trop grande $= 53''. 5$.

Et l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la latitude de la ☾ trop petite $= 2''. 5$.

4. Ob-

## 4. Obſervation.

**Immerſion de γ de la Balance, dans la partie éclairée de la Lune, obſervée par Mr. *Mallet* le 6 Avril 1776. à 14ʰ. 35ʹ. 58ʺ. 2 Temps vray.**

## Calcul.

Différence des méridiens ſuppoſée
entre Genève & Paris de 15ʹ. 00ʺ. de temps.
entre Genève & Greenwich de 24ʹ. 16ʺ. de temps.

| | | |
|---|---|---|
| Longitude du ☉ - - - | Par les Tabl. de *Mayer*. | 0ˢ. 17°. 49ʹ. 2ʺ, 2. |
| Aſcenſ. droite du ☉ - - | | 0. 16. 25. 35, |
| Obliquité de l'ecliptique - - | | - 23. 28. 00, |
| Longit. vraye de la ☾ - - | | VII. 21. 42. 29, 4. |
| Latit. vraye boréale de la ☾ - | | - 4. 59. 4, 4. |
| Mouvement hor. de la ☾ en longit. | | - - 31. 38, 5. |
| Parallaxe horiz. aequator. de la ☾ | | - - 55. 53. 8. |
| Diamètre horiz. de la ☾ - - | | - - 30. 27, 8. |
| Diamètre de la ☾ augmenté - | | - - 30. 42, 8. |
| Parallaxe dont la long. vr. de la ☾ eſt augmentée - - - | | - - 9. 6, 9. |
| Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eſt diminuée - - - | | - - 47. 35, 2. |
| Longit. appar. de γ de la Balance tirée de *la Caille* & *Bradley* - | | VII. 22. 00. 38, 2. |
| Latitude appar. boreale - id. - - - | | - 4. 24. 32, 4. |

## Reſultat.

Temps vrai de la Conjonction le 6 Avril 1776
à 15ʰ. 10ʹ. 54ʺ. 7 + 3, 13 δ + 2, 49 η − 1, 81 π.
Erreur dont la Longit. de la ☾ par les Tabl. de *Mayer* eſt trop grande = 17ʺ. 8 + 0, 53 Φʺ.

## 5. Observation.

Immersion d'une étoile qui est entre la Balance & le Scorpion, dans la partie obscure de la Lune, observee par Mrs. *Trembley* & *Pictet* le 25 Juillet 1776 à 10$^h$. 58$'$. 56$''$. 2 Temps vray.

## Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris supposée de 15$'$. 00$''$. de temps.
de Genève & Greenwich supposée de 24$'$. 16$''$. de temps.

| | | |
|---|---|---|
| Longitude du ☉ - - - | Par les Tabl. de Mayer. | IV$^s$. 3°.23$'$.26$''$,9. |
| Ascens. droite du ☉ - - | | IV. 5. 42. 0, 2. |
| Obliquité de l'ecliptique - - | | - 23. 28. 1, 0. |
| Longitude vraye de la ☾ - - | | VII. 28. 22. 11, 9. |
| Latitude vraye boréale de la ☾ - | | - 4. 54. 42, 3. |
| Mouvement hor. de la ☾ en longit. | | - - 32. 1, 9. |
| Parallaxe horiz. aequator. de la ☾ | | - - 56. 27, 7. |
| Diamètre horiz. de la ☾ - - | | - - 30. 46, 4. |
| Diamètre de la ☾ augmenté - | | - - 30. 52, 7. |
| Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ est diminuée - - - - | | - - 20. 58, 1. |
| Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ est diminuée - - - | | - - 51. 4, 9. |
| Longitude appar. de l'étoile tirée du Catalogue de Flamstead - - | | VII. 28. 17. 24, 0. |
| Latitude appar. boréale de l'étoile id. | | - 4. 4. 21, 5. |

## Resultat.

Temps vrai de la Conjonction le 25 Juillet 1776
à 10$^h$. 29$'$. 58$''$. 7 $+$ 1, 87 $\delta$ $+$ 0, 09 $\eta$ $-$ 0, 78 $\pi$.

Erreur dont la Longit. de la ☾ par les Tables de *Mayer* est trop petite $=$ 42$''$. 5 $-$ 0, 53 $\Phi''$.

6. Ob

## 6. Observation.

Immersion de la précédente des deux australes du quarré des Poissons, dans la partie éclairée de la Lune, observée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 20 Aoust 1777 à 10$^h$. 59'. 3'', 7 Temps vrai.

### Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris supposée de 15'. 00''. de temps.
de Genève & Greenwich supposée de 24'. 16''. de temps.

| | Par les Tables de *Mayer*. |
|---|---|
| Longitude vraye du ☉ | IV$^s$. 28°. 6'. 29'', 0. |
| Ascens. droite du ☉ | V. 9. 16. 59, |
| Obliquité de l'ecliptique | - 23. 28. 3, |
| Longit. vraye de la ☾ | XI. 24. 33. 22, 2. |
| Latit. vraye australe de la ☾ | - 4. 45. 16, 2. |
| Mouvement hor. de la ☾ en longit. | - - 36. 19, 6. |
| Parallaxe horiz. aequator. de la ☾ | - - 59. 55, 6. |
| Diamètre horiz. de la ☾ | - - 32. 39, 8. |
| Diamètre de la ☾ augmenté | - - 32. 54, 3. |
| Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ est augmentée | - - 7, 4, 7. |
| Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ est augmentée | - - 53. 50, 6. |
| Longit. appar. de l'étoile tirée de *Bradley* | XI. 24. 56. 30, 0. |
| Latit. appar. australe de l'étoile id. | - 5. 42. 33, 5. |

### Resultat.

Temps vrai de la Conjonction le 20 Aout 1777
à 11$^h$. 37'. 27''. 3 + 1, 69 δ + 2, 36 γ + 9, 51 π.
Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longitude de la Lune trop grande = 2'. 14'' [illegible] 6 δ'.

7. Ob-

## 7. Obſervation.

**Immerſion de la ſuivante des deux auſtrales du quarré des Poiſſons, dans la partie éclairée de la Lune, obſervée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 20 Aouſt 1777 à 13$^h$. 6$'$. 13,$''$5 Temps vrai.**

### Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris ſuppoſée de 15$'$. 00$''$ de temps.
de Genève & Greenwich ſuppoſée de 24. 16

| | par les Tables de *Mayer*. | |
|---|---|---|
| Longitude vraye du ☉ - - - | | IV$^s$.28°. 11$'$. 35$''$,6 |
| Aſcenſ. droite du ☉ - - - | | V. 0. 21. 52, 0 |
| Obliquité de l'ecliptique - - | | - 23. 28. 3, 0 |
| Longitude vraye de la ☾ - - | | XI. 25. 50. 22, 1 |
| Latitude vraye auſtrale de la ☾ - | | - 4. 47. 52, 6 |
| Mouvem. hor. de la ☾ en longit. | | - - 36. 20, 9 |
| Parallaxe horiz. aequator. de la ☾ | | - - 59. 56, 9 |
| Diamètre horizont. de la ☾ - - | | - - 32. 40, 4 |
| Diamètre de la ☾ augmenté - - | | - - 33. 0, 8 |
| Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ eſt diminuée - - - | | - - 11. 34, 6 |
| Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eſt augmentée - - - | | - - 46. 50, 4 |
| Longitude appar. de l'étoile tirée de *Bradley* - - - - | | XI. 25. 50. 18, 0 |
| Latitude appar. auſtrale, *id.* - - | | - 5. 46. 23, 3 |

### Reſultat.

**Temps vrai de la Conjonction le 20 Aouſt 1777 à 13$^h$. 6$'$. 28$''$, 8 + 2, 33 $\delta$ + 1, 65 $\eta$ + 0, 97 $\pi$.**

**Erreur des Tables de *Mayer* qui donnent la Longitude de la ☾ trop grande de 13$''$, 4 + 0, 61 $\Phi''$.**

8. Ob-

## 8. Observation.

**Occultation de μ de la Baleine par la Lune, observée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 23 Aoust 1777.**

Immersion dans la partie éclairée à 10$^h$. 55'. 41'', 5 } Temps vr.
Emersion de la partie obscure 11. 51. 36, 0 }

## Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris supposée de 15'. 00''. de temps
de Genève & Greenwich de 24. 16

| | | Pour l'Immers. | Pour l'Emers. |
|---|---|---|---|
| Longitude vraye du ☉ - - - | par les Tables de *Mayer*. | Vs. 0°. 59'. 59'',2 | Vs. 1°. 2'. 14'',1 |
| Ascens. droite du ☉ - - - | | V. 3. 2. 53,7 | V. 3. 5. 2,9 |
| Obliquité de l'ecliptique - - | | - 23. 28. 3,0 | - - - - |
| Longitude vraye de la ☾ - - | | I. 8. 7. 22,7 | I. 8. 40. 55,1 |
| Latitude vraye australe de la ☾ | | - 4. 48. 36,0 | - 4. 47. 31,0 |
| Mouvem. hor. de la ☾ en longit. | | - - 36. 1,2 | - - 36. 0,3 |
| Mouvem. hor. de la ☾ en latit. | | - - 1. 9,3 | - - 1. 11,0 |
| Parallaxe horiz. aequat. de la ☾ | | - - 59. 48,3 | - - 59. 47,6 |
| Diamètre horiz. de la ☾ - - | | - - 32. 35,6 | - - 32. 35,2 |
| Diamètre de la ☾ augmenté - | | - - 32. 43,3 | - - 32. 48,3 |
| Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ est augmentée - - | | - - 25. 56,6 | - - 24. 1,4 |
| Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ est augmentée - - - | | - - 52. 10,3 | - - 49. 47,6 |
| Longitude appar. de l'étoile tirée de *Bradley* - - - | | I. 8. 49. 2,8 | - - - - |
| Latitude appar. australe *id.* - - | | - 5. 34. 44,8 | - - - - |

## Resultat.

Par l'Immers. Temps vrai de la Conjonct. le 23 Août 1777 à 12$^h$. 4$'$. 22$''$, 0 + 1, 79 $\delta$ − 0, 66 $\eta$ + 0, 157 $\pi$.

Par l'Emers. à 12. 4. 30, 5 − 1, 69 $\delta$ + 0, 26 $\eta$ + 0, 897 $\pi$.

Par une moyenne entre l'Immersion & l'Emersion à 12$^h$. 4$'$. 26$''$, 2 + 0, 05 $\delta$ − 0, 20 $\eta$ + 0, 527 $\pi$.

Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite de $\begin{cases} 26'', 3 - 0, 60\ \phi^{n} & \text{par l'Immers.} \\ 23, 0 - 0, 60\ \phi & \text{par l'Emers.} \end{cases}$

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. *de la Lande* on trouve :

Mouvement sur l'orbite apparente pendant l'occultation . . . . . . FL = 0°. 31$'$. 39$''$, 6.

Inclinaison de l'orbite apparente, AFL = 6. 16. 37, 8

Distance sur l'eclipt. de l'Immers. à la conjonct. appar. - HF = 15. 19, 7

Differ. des latit. appar. de l'étoile & de la ☾ à l'Immers. - EL = 5. 56, 1

D'où resulte le temps vrai de la Conjonction à 12$^h$. 4. 29$''$, 1

l'erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite de - - 23$''$, 8

& l'erreur dont elles donnent la latit. de la ☾ trop grande - - - 5$'$, 4

## 9. Observation.

Occultation de $\delta$ précédente du Taureau par la Lune, observée par Mrs. *Mallet* & *Pictet* le 21 Septembre 1777.

Immersion dans la partie éclairée à 11$^h$. 11$'$. 42$''$, 3 }
Emersion de la partie obscure - 12. 8. 32, 0 } temps vr.

Calcul.

## Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris supposée - de 15'. 00"
de Genève & Greenwich - de 24. 16 } de temps

| | | Pour l'Immers. | Pour l'Emers. |
|---|---|---|---|
| Longitude vraye du ☉ | par les Tables de Mayer | Vs. 29°. 12'. 54",4 | Vs. 29°. 15'. 13" 6 |
| Ascens. droite du ☉ | | V. 29. 16. 48, 0 | V. 29. 18. 56, 0 |
| Obliquité de l'écliptique | | - 23. 28. 4 | - - - - |
| Longitude vraye de la ☾ | | II. 2. 58. 13, 8 | II. 3. 32. 15, 1 |
| Latitude vraye australe de la ☾ | | - 3. 22. 9, 6 | - 3. 19. 54, 7 |
| Mouvem. hor. de la ☾ en longitude | | - - 35. 58, 5 | - - 35. 56, 6 |
| Mouvem. hor. de la ☾ en latitude | | - - 2. 21, 7 | - - 2. 22, 7 |
| Parallaxe horiz. aequat. de la ☾ | | - - 59. 53, 3 | - - 59. 51, 9 |
| Diamètre horiz. de la ☾ | | - - 32. 36, 3 | - - 32. 37, 6 |
| Diamètre de la ☾ augmenté | | - - 32. 51, 5 | - - 32. 55, 9 |
| Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ est augmentée | | - - 32. 27, 0 | - - 29. 27, 8 |
| Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ est augmentée | | - - 44. 48, 5 | - - 41. 17, 0 |
| Longitude appar. de l'étoile tirée de *la Caille & Bradley* | | II. 3. 45. 28, 8 | - - - - |
| Latitude appar. australe *id.* | | - 3. 59. 31, 3 | - - - - |

## Resultat.

Par l'Immers. Temps vrai de la Conjonct. le 21 Septembre 1777 à 12$^b$. 30'. 19",2 + 1,87δ − 0,85η + 0,27π.
Par l'Emers. à 12. 30. 18, 2 − 1,68δ + 0,27η + 0,94π.
Par une moyenne entre l'Immersion & l'Emersion.
à 12$^b$. 30'. 18",7 + 0,09δ − 0,[illegible]η + 0,60π.



Erreur

Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la Longitude de la ☾ trop petite de 6'', 7 — 0, 60 Φ'' par l'Imm.
& de 11, 2 — 0, 60 Φ'' par l'Emerf.

Par la methode qui eſt dans l'Aſtronomie de Mr. *de la Lande* on trouve:

Mouvem. ſur l'orbite appar. pendant l'occultation - - F L = 0°. 31'. 29,'' 6
Inclinaiſon de l'orbite apparente A F L = 10. 33. 47, 2
Diſtance ſur l'eclipt. de l'Immerſ. à la Conjonct. appar. - H I = 14. 37, 0
Differ. des latit. appar. de l'étoile & de la ☾ à l'Immerſion - E L = 7. 34, 0
D'où reſulte le temps vrai de la Conjonction à 12$^h$. 30'. 12'',2
l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite - de 11,'' 0
& l'erreur dont elles donnent la latit. de la ☾ trop petite de - - de 7,'' 2

## 10. Obſervation.

Occultation de δ ſuivante du Taureau par la Lune, obſervée par Mrs. *Mallet* & *Pictet* le 21 Septembre 1777.

Immerſion dans la partie éclairée à 11$^h$. 36'. 55'',2 } Temps vr.
Emerſion dans la partie obſcure à 12. 32. 46,4 }

### Calcul.

Différence des méridiens
ſuppoſée de Genève & Paris de 15'. 00'' } de temps.
de Genève & Greenwich de 24. 16 }

Lon-

| | | Pour l'Immerſ. | Pour l'Emerſ. |
|---|---|---|---|
| Longitude vraye du ☉ - - | par les Tables de Mayer. | Vˢ. 29°. 13′. 58″,8 | Vˢ. 29°. 16′. 14″,8 |
| Aſcenſ. droite du ☉ - - - | | V. 29. 17. 45,0 | V. 29. 19. 51,0 |
| Obliquité de l'ecliptique - - | | - 23. 28. 4,0 | - - - - |
| Longitude vraye de la ☾ - - | | II. 3. 13. 20,6 | II. 3. 46. 46,2 |
| Latitude vraye auſtrale de la ☾ | | - 3. 21. 10,1 | - 3. 18. 57,1 |
| Mouv. horiz. de la ☾ en longit. | | - - 35. 58.5 | - - 35. 56,6 |
| Mouvement. hor. de la ☾ en latit. | | - - 2. 21,7 | - - 2. 22,7 |
| Parallaxe horiz. aequat. de la ☾ | | - - 59. 52,7 | - - 59. 51,3 |
| Diamètre horiz. de la ☾ - - | | - - 32. 38,0 | - - 32. 37,3 |
| Diamètre de la ☾ augmenté - | | - - 32. 54,4 | . . . . . |
| Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ | | | - - 32. 58,4 |
| eſt augmentée - - - | | - - 31. 24,2 | |
| Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ | | | - - 27. 31,3 |
| eſt augmentée - - - | | - - 43. 16,1 | - - 39. 44,5 |
| Longitude appar. de l'étoile tirée *de la Caille* & *Bradley* - - | | II. 4. 0. 56,7 | - - - - - |
| Latitude appar. auſtrale *id.* - - | | - 4. 8. 0,8 | - - - - - |

## Reſultat.

Par l'Immerſ. Temps vrai de la Conjonct. le 21 Septembre 1777 à $12^h. 56'. 9'',0 + 1,71\,\delta + 0,37\,\eta + 1,14\,\pi$.

Par l'Emerſ. à $12. 55. 57,3 - 2,02\,\delta - 1,14\,\eta + 0,01\,\pi$.

Par une moyenne entre l'Immerſion & l'Emerſion

à $12^h. 56'. 3'',1 - 0,15\,\delta - 0,38\,\eta + 0,57\,\pi$.

Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite - de $5'',9 - 0,60\,\Phi''$ par l'Immerſ.
& de $17,2 - 0,60\,\Phi''$ par l'Emerſ.

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. *de la Lande* on trouve:

Mouvement sur l'orbite appar. pendant l'occultation FL = 0°. 30'. 1", 4

Inclinaison de l'orbite apparente AFL = 11. 1. 43, 2

Distance sur l'ecliptique de l'Immers. à la Conjonct. app. HI = 16. 5, 3

Différence des latit. appar. de l'étoile & de la ☾ par l'Immers. LE = 3. 46, 9

D'où resulte le temps vrai de la Conjonct. à 12ʰ. 56'. 4", 3

l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite - - - de 8", 6

& l'erreur dont elles donnent la Latit. de la ☾ trop grande de - - - 11, 9

## 14. Observation.

Occultation de δ précédente du Taureau par la Lune, observée par Mr. *Trembley*. le 15 Novembre 1777.

Immersion dans la partie éclairée à 6ʰ. 50'. 53", 6 } Temps vr.
Emersion dans la partie obscure à 7. 36. 40, 7 }

NB. Le bord de la ☾ étoit très tremblant à l'Immersion.

## Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris supposée de 15'. 00" } de temps
de Genève & Greenwich - de 24. 16 }

Longi-

| | | Pour l'Immerf. | Pour l'Emerf. |
|---|---|---|---|
| ngitude vraye du ☉ - - | par le Tables de *Mayer.* | VII^s.23°.47'.14'',2 | VII^s.23°.49'. 9'',7 |
| cenf. droite du ☉ - - | | VII. 21. 24. 4,0 | VII. 21. 26. 2,0 |
| liquité de l'ecliptique - - | | - 23. 28. 4,0 | - - - - |
| ngitude vraye de la ☾ - - | | II. 2. 55. 57,1 | II. 3. 25. 00,0 |
| titude vraye auftrale de la ☾ | | - 3. 4. 24,5 | - 3. 2. 18,9 |
| ouvem. hor. de la ☾ en longit. | | - - 38. 2,1 | - - 38. 1,1 |
| ouvem. hor. de la ☾ en latit. - | | - - 2. 44,1 | - - 2. 45,1 |
| rallaxe horiz. aequat. de la ☾ | | - - 61. 27,8 | - - 61. 27,1 |
| iamètre horiz. de la ☾ . - - | | - - 33. 29,8 | - - 33. 29,4 |
| iamètre de la ☾ augmenté - | | - - 33. 39,7 | - - 33. 43,7 |
| rallaxe dont la longit. vr. de la ☾ eft augmentée - - - | | - - 34. 9,9 | - - 33. 43,0 |
| rallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eft augmentée - - - | | - - 48. 55,3 | - - 46. 13,4 |
| ngitude appar. de l'étoile tirée *de la Caille & Bradley* - - | | II. 3. 45. 46,1 | - - - - |
| titude appar. auftrale *id.* - - | | - 3. 59. 32,4 | - - - - |

## Refultat.

Par l'Immerf. Temps vrai de la Conjonct. le 15 Nov. 1777
à $8^h. 9'. 31'',4 + 1,70\,\delta + 0,63\,\eta + 1,38\,\pi$.

Par l'Emerf. à $8. 9. 41,7 - 2,08\,\delta - 1,36\,\eta - 0,16\,\pi$.

Par une moyenne entre l'Immerfion & l'Emerfion
à $8^h. 9'. 36'',5 - 0,19\,\delta - 0,36\,\eta + 0,61\,\pi$.

Erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop grande de $\begin{cases} 1'',7 + 0,63\,\Phi^h & \text{par l'Immerf.} \\ 9,2 + 0,63\,\Phi & \text{par l'Emerf.} \end{cases}$

Par

Par la methode qui eſt dans l'Aſtronomie de Mr. *de la Lande* on trouve:

Mouvement ſur l'orbite appar. pendant l'occultation - - - FL = 0°. 28'. 55'', 8

Inclinaiſon de l'orbite appar. - AFL = 9. 32. 1, 5

Diſtance ſur l'eclipt. de l'Immerſ. à la Conjonct. apparente - HI = 15. 42, 8

Différence des latitudes appar. de l'étoile & de la ☾ pour l'Immerſ. LE = 6. 7, 5

D'où reſulte le temps vrai de la Conjonct. à $8^h. 9'. 34'',6$

l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop grande - de 3'', 7

& l'erreur dont elles donnent la latit. de la ☾ trop petite de - - - de 5'', 1

---

---

RÉFLE-

# RÉFLEXIONS SUR LES INÉGALITÉS DANS LE MOUVEMENT DE LA TERRE, CAUSÉES PAR L'ACTION DE VENUS

par

Mr. *L. EULER.*

Pour déterminer les dérangemens dans le mouvement des Planètes, qui ſont cauſés par leur action mutuelle, on ſe ſert ordinairement de la méthode, que j'ai employé le premier, ſi je ne me trompe, dans mes recherches ſur les irrégularités, qu'on obſerve dans le mouvement de Saturne. Or cette méthode ne ſçauroit réuſſir, à moins qu'on ne trouve moyen de transformer une telle formule irrationelle: $(1 \pm n \cos\Phi)^{-\frac{3}{2}}$ dans une ſérie convergente, dont les trois premiers termes expriment déjà aſſés exactement la juſte valeur; ce qui n'a aucune difficulté dans tous les cas, où la lettre $n$ marque une fraction très petite, puisque alors les trois premiers termes de cette ſerie: $1 \pm \frac{3}{2} n \cos\Phi + \frac{15}{8} nn \cos\Phi^2$ ne ſçauroient s'écarter ſenſiblement de la vérité. Mais quand la valeur

de $n$ devient plus considérable & qu'elle approche même de l'unité: alors il est clair, que ces mêmes trois termes pourront bien énormément s'écarter de la valeur de la formule, & que les termes suivans, qu'on néglige, pourront causer une erreur très considérable.

Or cette formule entre très essentiellement dans le calcul; vu qu'elle renferme l'effet de l'action, que les deux Planètes exercent l'une sur l'autre. Pour montrer cela plus clairement, soient P & Q les deux Planètes, le Soleil étant supposé en repos en S, & nommant les distances $SP = p$ & $SQ = q$ & l'angle au Soleil $PSQ = \Phi$, la distance entre les Planètes sera $\sqrt{pp + qq - 2pq \operatorname{cos}. \Phi}$, au quarré de la quelle l'action des Planètes est réciproquement proportionelle, qui sera donc comme $\frac{A}{pp + qq - 2pq \operatorname{cos}. \Phi}$; mais la décomposition de cette force, que l'application aux principes du mouvement exige, conduit à des formules, divisées par le cube de cette distance PQ, dont la forme sera par conséquent

$$\frac{S}{(pp + qq - 2pq \operatorname{cos}. \Phi)^{\frac{3}{2}}}$$

ou bien $S(pp + qq - 2pq \operatorname{cos}. \Phi)^{-\frac{3}{2}}$, qui se reduit à la forme mentionnée, en supposant

$$pp + qq = SS \;\&\; \frac{2pq}{pp + qq} = n.$$

De là on voit, que la valeur de la lettre $n$ dépend du rapport des distances $p$ & $q$, dont les deux Planètes sont éloignées du Soleil, & qu'elle ne sçauroit être une petite fraction, à moins que l'une de ces deux distances ne soit

plus-

plusieures fois plus grande que l'autre. Ainsi dans le cas ou Jupiter est supposé en P & Saturne en Q on a

$$p = 52029 \ \& \ q = 95418$$

ou bien à peu près $p : q = 5 : 9$, d'où résulte la valeur de $n = \frac{45}{53}$, dont la proximité de l'unité est sans doute la raison, pourquoi tous les efforts de la Théorie ont jusqu'ici si peu réussi.

Or cet inconvénient devient encore beaucoup plus considérable lorsqu'on veut déterminer l'effet de l'action mutuelle de la Terre & de Venus; car supposant Venus en P & la Terre en Q, on aura les distances moyennes $p = 72340$ & $q = 100000$, d'où l'on tire $n = 0, 94979$. Cette valeur approche déjà tant de l'unité, que la résolution mentionnée ci-dessus doit s'écarter très énormément de la vérité. Car supposant

$$(1 - n \operatorname{cos.} \Phi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2} n \operatorname{cos.} \Phi + \tfrac{15}{8} n^2 \operatorname{cos.} \Phi^2$$

on aura pour la conjonction, où l'angle $\Phi = 0$

$$(1 - n)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2} n + \tfrac{15}{8} n n.$$

Or on trouve la vraye valeur de la formule

$$(1 - n)^{-\frac{3}{2}} = 88, 882$$

& la somme des trois termes ne donne que

$$1 + \tfrac{3}{2} n + \tfrac{15}{8} n n = 4, 116.$$

Cette différence est sans doute extravagante. Considérons aussi le cas des oppositions, où $\Phi = 180°$, & qu'on suppose

$$(1 + n)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \tfrac{3}{2} n + \tfrac{15}{8} n n;$$

or le premier membre de cette équation produit

$$(1 + n)^{-\frac{3}{2}} = 0, 367$$

& les trois termes de l'autre membre donnent

$$1 - \frac{3}{2}n + \frac{15}{8}nn = 1,268.$$

D'où il eſt clair, qu'en employant cette méthode on riſquera de ſe tromper très groſſiérement.

Pour remédier à ce grand défaut je doute fort qu'on puiſſe découvrir une autre méthode, que celle, que j'ai expoſée dans le Volume XVI des nouveaux Commentaires de l'Académie, où j'ai formé le plan de pourſuivre quaſi pas à pas les deux Planètes dans leur mouvement & de déterminer pour chaque petit intervalle de tems l'effet, que l'action de Venus doit produire dans le mouvement de la Terre; & nôtre habile Aſtronome, Mr. *Lexell*, a bien voulu ſe charger de ſon exécution, en faiſant tous les calculs laborieux & pénibles, qu'il exigeoit, et qui lui ont fourni la table, qu'on y trouve ajoutée, pour la correction, à employer dans le lieu de la Terre, pour chaque ſituation par rapport à Venus. Or comme l'effet eſt toujours porportionel à la maſſe de Venus, nous l'avons ſuppoſée égale à celle de la Terre, de ſorte qu'en cas qu'elle fut ou plus grande ou plus petite, on n'auroit qu'à changer les nombres de la Table dans la même proportion.

On trouve auſſi une telle correction dans les tables ſolaires de feu Mr. de la *Caille*, que je préſume être calculée ſuivant la méthode ordinaire, dont je viens de démontrer l'inſuffiſance. Je me propoſe de comparer plus ſoigneuſement cette table avec celle que Mr. *Lexell* a conſtruite ſur les véritables principes. Ce qui eſt d'autant plus facile, que l'une & l'autre ſe rapporte au même argument, qu'on trouve, en ſouſtrayant la longitude

gitude moyenne de la Terre, vuë du Soleil, de la longitude héliocentrique moyenne de Venus. La table ci-jointe peut servir à faciliter cette comparaison entre les deux tables des corrections mentionnées, & en la considérent plus attentivement elles nous fournit les réflexions suivantes.

I. Designons d'abord l'argument de cette Table par la lettre $\Phi$, qui marque comme ci-dessus l'angle au Soleil compris entre les lieux de la Terre & de Venus, & on voit d'abord, que tant pour $\Phi = 0$ que $\Phi =$ VI. signes l'une & l'autre équation évanouit. Ensuite on voit que la plus grande équation de nos tables est plus grande que celle de Mr. *de la Caille*; mais ce n'est pas au défaut de la Théorie qu'il faut attribuer cette différence, qui provient uniquement de l'estime de la masse de Venus, que j'ai supposée égale à la Terre; fondé sur la véritable parallaxe du Soleil de 8,″; pendant que Mr. *Clairaut*, sur la Théorie du quel les Tables de Mr. *de la Caille* sont fondées, l'a supposée de 10″; d'où se volume de Venus se conclud environ deux tiers de la Terre, ce qui est très bien d'accord avec les valeurs de la plus grande équation, qui dans ma table monte à 22, 3 & dans la Table de Mr. *de la Caille* à 15, 2. Nous avons supposé ici l'un & l'autre, que les masses sont en raison des volumes; donc si, comme le grand *Newton* a soutenu, la densité des Planètes est plus grand dans celles qui sont les plus proches du Soleil, il faudroit encore augmenter la plus grande équation.

II. En partant de la conjonction, où $\Phi = 0$, les équations de notre table augmentent beaucoup plus que dans celle de Mr. *de la Caille*, & cette augmentation s'etend

aussi beaucoup plus loin, puisque dans notre table elles croissent jusqu'à $\Phi = 2^s. 8^\circ$, pendant que dans celle *de la Caille* l'équation atteint la plus grande valeur à $\Phi = 30^\circ$. Cette différence provient ouvertement de la fausseté de la Théorie, puisque on y suppose l'action de Venus sur la Terre environ 20 fois plus petite, qu'elle n'est effectivement comme nous avons observé ci-dessus. Donc puisque cette action est en effet tant de fois plus grande, il s'ensuit nécessairement que son effet doit être beaucoup plus grand & qu'il se doit aussi étendre plus loin.

III. Le contraire arrive après les oppositions, où $\Phi > VI^s$. où la véritable action de Venus est presque quatre fois plus petite que la fausse Theorie la suppose, comme nous avons déjà remarqué ci-dessus. Il faut donc aussi que dans nôtre table les équations croissent plus foiblement que dans la Table de Mr. *de la Caille*, & en regardant nôtre table de comparaison, on voit qu'elles diffèrent réëllement de la même manière comme nous venons d'observer.

IV. Ensuite il se trouve aussi une grande différence entre les endroits répondans aux plus grandes équations, qui sont, après les conjonctions, selon les tables de Mr. *de la Caille*, à $\Phi = 30^\circ$. & dans ma table à $\Phi = 2^s. 8^\circ$. & après l'opposition, selon les premières à $\Phi = 7^s. 25^\circ$. & selon la mienne à $\Phi = 9^s. 17^\circ$. Or la plus grande différence se trouve dans la marche de ces équations; puisque dans la table construite sur les vrais principes les équations conservent le même signe depuis la conjonction jusqu'à l'opposition, pendant que dans les tables de Mr. *de la Caille* elles changent de signe à $\Phi = 2^s. 3^\circ$.

V.

V. Remarquons aussi les endroits, où la différence entre les deux Tables devient la plus grande, ce qui arrive à $\Phi = 3^s.\ 12^\circ.$ où elle monte à 30, 8″. Donc si pour une telle situation on calcule le lieu de la Terre selon les tables *de la Caille*, on se trompera de plus du 30″; & partant on ne doit pas être surpris, quand Mr. *de la Caille* avoue lui même, que ses tables peuvent quelques fois différer des observations d'autant de secondes; & peutêtre seront-ce les mêmes cas, où sa table des perturbations de Venus diffère si enormément de la vérité, parce que depuis $\Phi = 2^s.$ jusqu'à $\Phi = 4^s.\ 22^\circ.$ c'est à dire pendant un intervalle de 82°. la différence entre les deux tables monte au de la de 20″.

VI. Puisque Mr. *de la Caille* dit avoir calculé cette table sur les formules de feu Mr. *Clairaut*, il sera aisé de retrouver ces formules des équations mêmes de la Table, vu qu'il est certain que cette formule doit avoir une telle forme: $\alpha \text{ sin. } \Phi + \beta \text{ sin. } 2\Phi + \gamma \text{ sin. } 3\Phi + \&c.$ Car on n'a qu'à tirer de cette formule les équations pour quelques situations principales, que nous ajouterons ici dans cette table, en marquant les équations, qui en résultent, par les lettres A, B, C, D, &c.

| | |
|---|---|
| $3^s.$ — | $A = \alpha - \gamma$ |
| 2. — | $B = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} - \frac{\delta\sqrt{3}}{2}$ |
| 4. — | $C = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - \frac{\beta\sqrt{3}}{2} + \frac{\delta\sqrt{3}}{2}$ |
| 1. 15° | $D = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ |
| 4. 15 | $E = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ |
| 1. — | $F = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} + \gamma + \frac{\delta\sqrt{3}}{2}$ |
| 5. — | $G = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta\sqrt{3}}{2} + \gamma - \frac{\delta\sqrt{3}}{2}$ |

De

De ces équations nous déduisons les combinaisons suivantes:

$$B+C=\alpha\sqrt{3} \ \& \ B-C=\beta\sqrt{3}-\delta\sqrt{3},$$
$$D+E=\alpha\sqrt{2}+\gamma\sqrt{2} \ \& \ D-E=2\beta,$$
$$F+G=\alpha+2\gamma \ \& \ F-G=\beta\sqrt{3}+\delta\sqrt{3}.$$

Appliquons maintenant ces formules à la table de Mr. *de la Caille*, & nous aurons:

$$A=9,4,\ B=-0,9,\ C=15,1,\ D=-4,5,$$
$$E=14,5,\ F=-5,6,\ G=11,4.$$

De là on tire

$$A=\alpha-\gamma=9,4$$
$$B+C=\alpha\sqrt{3}=14,2$$
$$B-C=\beta\sqrt{3}-\delta\sqrt{3}=-16,0$$
$$D+E=\alpha\sqrt{2}+\gamma\sqrt{2}=10,0$$
$$D-E=2\beta=-19,0$$
$$F+G=\alpha+2\gamma=5,8$$
$$F-G=\beta\sqrt{3}+\delta\sqrt{3}=-17,0$$

& de ces équations on tire $\alpha=8,2$, $\beta=-9,5$, $\gamma=-1,2$, $\delta=-0,3$. Voilà donc la formule de Mr. *Clairaut*, sur laquelle l'Abé *de la Caille* a calculé sa Table, qui donne pour chaque argument $\Phi$ l'équation Venérienne $8,2.\sin.\Phi-9,5\sin.2\Phi-1,2\sin.3\Phi-0,3\sin.4\Phi$.

VII. Quelque fausse que soit cette formule elle a pourtant depuis été adoptée de presque tous les Astronomes, vu qu'on trouve la même table dans tous les recueils de tables astronomiques qui ont été publiés depuis ce temps, & même la trouve t-on, à quelques arrangemens de la forme près, dans les tables lunaires de feu Mr. *Mayer*, publiées à Londres, qu'on regarde comme les plus exactes.

Or

Or après les remarques, que j'ai rapportées ici, on ne fçauroit plus douter, qu'en fe fervant de ces tables, on ne fe trompe très fouvent de 20 à 30 fecondes, ce qui doit avoir une influence très effentielle dans les tables lunaires, où la détermination du vrai lieu de la Lune fuppofe toujours celle du Soleil, & partant cette obfervation doit être de la dernière importance dans le grand Problême de la Longitude.

VIII. Comme nôtre table n'a été calculée fur aucune formule femblable: mais qu'elle renferme le réfultat de toutes les actions élémentaires ajoutées enfemble il n'eft gueres probable, qu'on puiffe trouver une formule, qui repréfente exactement toutes les équations de cette table. Cependant il ne fera pas difficile de déterminer les coëfficiens $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, enforte que la formule répond au moins à peu près à la vérité.

Faifons un effai la deffus & nous aurons pour les pofitions principales indiquées ci-deffus les valeurs fuivantes: $A = -20,6$, $B = -21,6$, $C = -13,0$, $D = -18,9$, $E = -8,5$, $F = -13,8$, $G = -4,4$. De là on tire les égalités fuivantes: 1°. $\alpha - \gamma = -20,6$; 2°. $\alpha \sqrt{3} = -34,6$; 3°. $(\beta - \delta)\sqrt{3} = -8,6$; 4°. $(\alpha + \gamma)\sqrt{2} = -27,4$; 5°. $2\beta = -10,4$; 6°. $\alpha + 2\gamma = -18,2$; 7°. $(\beta + \delta)\sqrt{3} = -9,4$; d'où l'on tire les valeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de cette manière: Cherchons les valeurs des lettres $\alpha$ & $\gamma$, & d'abord la feconde équation donne $\alpha = -20,0$, ce qui étant fubftitué dans la première fournit $\gamma = +0,6$. Or de la quatrième on tire $\gamma = +0,5$, & de la fixième $\gamma = 0,9$. Mais puisque ces trois valeurs de $\gamma$ ne quadrent pas affez

 bien

bien ensemble, il faut réconnoitre une petite erreur dans l'une & l'autre des deux lettres $\alpha$ & $\gamma$, & cette erreur sera partagée également, en prenant $\alpha = -19,7$ & $\gamma = +0,8$. Pour les deux autres lettres $\beta$ & $\delta$ la 5^e. équation donne d'abord $\beta = -5,2$ & la 3^e & 7^e, jointes ensemble, donnent $2\beta = -10,4$, de sorte que nous pouvons hardiment supposer $\beta = -5,2$. Enfin la 7^e. — la 3^e. nous fournit $\delta = -0,2$.

IX. Voilà donc contre toute nôtre attente une formule, qui représente les équations de nôtre table plus exactement qu'on n'auroit osé espérer. Sçavoir pour chaque argument $\Phi$ l'équation de nôtre table se trouve être $-19,7 \sin.\Phi - 5,2 \sin.2\Phi + 0,8 \sin.3\Phi - 0,2 \sin.4\Phi$, & cette formule ne diffère presque du tout des positions, d'où nous l'avons tirée. Voyons donc comment elle satisfait à d'autres positions, & pour cet effet prennons $\Phi = 2^s.15^\circ. = 75^\circ.$ d'où en faisant le calcul on tire de la formule l'équation 22, 0, qui ne diffère que de 5'' de la table. Prennons aussi $\Phi = 3^s.15 = 105^\circ.$ & en faisant le calcul on trouve 17, 2 ce qui ne diffère que de 0, 1'' de la table. En examinant les cas $\Phi = 15^\circ.$ & $\Phi = 5^s.15^\circ = 165^\circ.$ on trouve les équations 7, 3 & 1, 7. dont les erreurs ne sont que 0, 0'' & 0, 2''.

X. Ce merveilleux accord de la formule que nous venons de trouver avec nôtre table ne sçauroit certainement être attribué à un pur hazard, & on pourroit même soupçonner que Mr. *Lexell* eut calculé cette table précisement sur cette même formule, si le détail de tout le calcul ne se trouvoit pas exposé dans les commentaires. Nous devons donc conclure, que cette formule est fondée réellement dans la véritable théorie, ce qui ouvrit une

nou-

nouvelle carrière pour perfectionner la Théorie, & tout revient maintenant, à sçavoir manier la Théorie ensorte, qu'on en puisse précisement tirer la formule dont nous venons de parler.

XI. Puisque les corrections, qu'on a données jusqu'ici pour les inégalités de Saturne, causées par l'action de Jupiter, sont tirées de la même fausse Théorie, on ne doit pas être surpris, qu'elles répondent si mal aux observations, & comme le cas est presque semblable à celui de la Terre & de Venus, on pourra à présent presque déviner la véritable formule, d'où l'on doit tirer les inégalités. Ainsi dans la formule $\alpha$ sin. $\Phi + \beta$ sin. $2\,\Phi + \gamma$ sin. $3\,\Phi + \delta$ sin. $4\,\Phi$ le premier coëfficient $\alpha$, qui selon la méthode commune étoit positif, doit être négatif & même beaucoup plus grand; ensuite le second coëfficient demeure bien négatif, mais il doit être diminué. Pour les deux autres coëfficiens $\gamma$ & $\delta$ ils influeront fort peu sur le lieu de Saturne. Mais il faut ici bien considerer que la force de Jupiter exerce encore un autre effet sur Saturne, qui provient de l'excentricité de leurs orbites, ce qui est une circonstance, à la quelle on n'a pas eu besoin de faire attention dans les orbites de la Terre de Venus, puisque l'excentricité de l'une & de l'autre est si petite, qu'il n'en sçauroit résulter un effet considérable.

# INVESTIGATIO PERTVRBATIONVM, QVAE IN MOTV TERRAE AB ACTIONE VENERIS PRODVCVNTVR.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Tab. XIII. Fig. 2. Existente Sole in S sit A T orbita Terrae, B V Veneris, ambae in plano eclipticae sitae. Sumamus autem initio, vnde tempora metimur, ambos Planetas fuisse in coniunctione i. e. in A et B; nunc vero elapso tempore $t$, cui motus Terrae medius respondeat $= t$, Terram versari in T, venerem vero in V, vocemusque angulos A S T $= \phi$ et B S V $= \psi$; tum vero sit angulus T S V $= \eta$, ita vt sit $\eta = \psi - \phi$, et iam $\eta$ designet elongationem Veneris a Terra, ex Sole visam. Praeterea vocetur distantia Terrae a Sole S T $= v$; Veneris autem distantia S V vt constans spectetur, sitque S V $= a$. Denique statuatur distantia Veneris a Terra T V $= w$, ita vt $w = \sqrt{vv + aa - 2av \cos. \eta}$.

§. 2. Exprimatur jam massa Solis per vnitatem sitque massa Terrae $= m$, quam ex Parallaxi Solis conclusi-

clusimus $= \frac{1}{1000000}$, eique massam Veneris aequalem supponamus. His positis Terra ad Solem sollicitabitur in directione TS, vi $= \frac{m+1}{vv}$ et a Venere sollicitabitur in directione TV, vi $= \frac{m}{ww}$. Denique quia etiam Sol, a Venere vrgetur vi $= \frac{m}{aa}$, haec vis contrario modo, secundum directionem VS, Terrae est applicanda. Has autem ternas vires ad duas revocare licet, complendo parallologrammum STOV; tum enim vis TV $= \frac{m}{ww}$ resoluetur in vim secundum TS $= \frac{mv}{w^3}$ et in vim secundum TO $= \frac{ma}{w^3}$, cuius directio convenit cum directione SV. Hinc ergo omnino Terra sollicitabitur in directione TS,

$$vi = \frac{1+m}{vv} + \frac{mv}{w^3};$$

tum vero etiam in directione VS,

$$vi = \frac{m}{aa} - \frac{ma}{w^3}.$$

§. 3. Inuentis his viribus ex T ad axem SA demittatur perpendiculum TX, et vocentur binae coordinatae SX $= x$ et XT $= y$, secundum quas ambae vires sollicitantes, resoluantur, vnde orietur vis secundum SX

$$= -\frac{(1+m)\,cos.\Phi}{vv} - \frac{mv\,cos.\Phi}{w^3} - \frac{m\,cos.\Psi}{aa} + \frac{ma\,cos.\Psi}{w^3}$$

et vis secundum XT

$$= -\frac{(1+m)\,sin.\Phi}{vv} - \frac{mv\,sin.\Phi}{w^3} - \frac{m\,sin.\Psi}{aa} + \frac{ma\,sin.\Psi}{w^3}$$

quibus viribus cum accelerationes debeant esse aequales, quae sunt secundum easdem directiones $\frac{ddx}{dt^2}$ & $\frac{ddy}{dt^2}$, habebuntur hae duae aequationes:

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{(1+m)\,cos.\Phi}{vv} - \frac{mv\,cos.\Phi}{w^3} - \frac{m\,cos.\Psi}{aa} + \frac{ma\,cos.\Psi}{w^3}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{(1+m)\,sin.\Phi}{vv} - \frac{mv\,sin.\Phi}{w^3} - \frac{m\,sin.\Psi}{aa} + \frac{ma\,sin.\Psi}{w^3}$$

ex quibus aequationibus omnia repeti debent, quae ad institutum nostrum desiderantur.

§. 4. Cum jam sit $x = v \cos. \Phi$ et $y = v \sin. \Phi$ erit $dx = dv \cos. \Phi - v d\Phi \sin. \Phi$ et $dy = dv \sin. \Phi + v d\Phi \cos. \Phi$; porro vero

I. $ddx = ddv \cos. \Phi - 2dv d\Phi \sin. \Phi - v d\Phi^2 \cos. \Phi - v dd\Phi \sin. \Phi$

II. $ddy = ddv \sin. \Phi + 2dv d\Phi \cos. \Phi - v d\Phi^2 \sin. \Phi + v dd\Phi \cos. \Phi$

ex quibus formulis per combinationem colliguntur sequentes:

I. $ddy \cos. \Phi - ddx \sin. \Phi = 2 dv d\Phi + v dd\Phi$

II. $ddx \cos. \Phi + ddy \sin. \Phi = ddv - v d\Phi^2$.

Hic iam loco $ddx$ et $ddy$ valores ex primis aequationibus, ex actione virium ortis, substituantur, prodibitque

$$\frac{2dv d\Phi + v dd\Phi}{d\theta^2} = -\frac{m}{aa}(\sin. \psi \cos. \Phi - \cos. \psi \sin. \Phi) + \frac{ma}{w^3}(\sin. \psi \cos. \Phi - \cos. \psi \sin. \Phi)$$

$$\frac{ddv - v d\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{(1+m)}{vv} - \frac{mv}{w^3} - \frac{m}{aa}(\cos. \psi \cos. \Phi + \sin. \psi \sin. \Phi) + \frac{ma}{w^3}(\cos. \psi \cos. \Phi + \sin. \psi \sin. \Phi)$$

siue ob $\psi - \Phi = \eta$ erit

$$\frac{2dv d\Phi + v dd\Phi}{d\theta^2} = \frac{ma}{w^3}\sin. \eta - \frac{m}{aa}\sin. \eta$$

$$\frac{ddv - v d\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{(1+m)}{vv} - \frac{mv}{w^3} - \frac{m}{aa}\cos. \eta + \frac{ma}{w^3}\cos. \eta.$$

§. 5. Hic totum negotium pendet ab idonea euolutione membrorum per $w^3$ diuisorum, vnde reliquas aequationum partes ad sinistram transponamus, vt aequationes nanciscamur huius formae:

$$\frac{2dv d\Phi + v dd\Phi}{d\theta^2} + \frac{m}{aa}\sin. \eta = \frac{ma}{w^3}\sin. \eta$$

$$\frac{ddv - v d\Phi^2}{d\theta^2} + \frac{1+m}{vv} + \frac{m \cos. \eta}{aa} = \frac{m}{w^3}(a \cos. \eta - v).$$

Vidi-

Vidimus autem initio, esse $w = \sqrt{vv + aa - 2av \cos. \eta}$, vbi, quia hi termini, vtpote littera $m$ affecti, per se sunt quam minimi, etiam distantiam $v$ tanquam constantem spectare licebit, siquidem ab excentricitate orbitae Terrae mentem abstrahamus, quippe quae non solum est satis parua, sed etiam in praesenti negotio nihil in actione Veneris mutare est censenda; quam ob caussam loco $v$ scribamus distantiam mediam Terrae a Sole, quam ponimus $= 1$, sicque erit $w = \sqrt{1 + aa - 2a \cos. \eta}$, ideoque

$$w = \sqrt{1 + aa}. \sqrt{1 - \frac{2a}{1+aa} \cos. \eta},$$

vbi loco $\frac{2a}{1+aa}$ scribamus litteram $n$, cuius valor, ob distantiam mediam Veneris a Sole $a = 0,72344$, erit $n = 0,94979$. Erit autem nunc

$$\frac{m}{w^3} = \frac{m}{(1+aa)^{\frac{3}{2}}} (1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}}$$

siue, si breuitatis gratia ponatur

$$\frac{m}{(1+aa)^{\frac{3}{2}}} = \mu, \text{ erit } \frac{m}{w^3} = \mu (1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}},$$

vbi notetur esse $\mu = 0,0000015 \, \Phi$.

§. 6. Alio autem loco hanc formulam irrationalem pro hoc ipso casu iam euolui, atque inueni esse

$$(1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}} = A + B \cos. \eta + C \cos. 2\eta + D \cos. 3\eta + \text{etc.}$$

et pro his litteris A, B, C, etc sequentes exactissimos, methodo prorsus singulari, adeptus sum valores:

$A = 9,39852$; $B = 16,68153$; $C = 13,87191$
$D = 11,17685$; $E = 8,80776$; $F = 6,85206$
$G = 5,26990$; $H = 4,04433$; $I = 3,08789$.

Ho-

Horum autem valorum numericorum loco in calculo retineamus litteras A, B, C, etc.

§. 7. Quoniam igitur in nostra priore aequatione continetur membrum

$$\frac{m\,a\,\sin.\eta}{w^3} = \mu\,a\,\sin.(A + B\cos.\eta + C\cos.2\eta + D\cos.3\eta + \text{etc.})$$

facta euolutione hoc membrum ita erit expressum

$$\mu\,a\left(\begin{array}{l} A\sin.\eta + \tfrac{1}{2}B\sin.2\eta + \tfrac{1}{2}C\sin.3\eta + \tfrac{1}{2}D\sin.4\eta + \text{etc.} \\ -\tfrac{1}{2}C\sin.\eta - \tfrac{1}{2}D\sin.2\eta - \tfrac{1}{2}E\sin.3\eta - \tfrac{1}{2}F\sin.4\eta - \text{etc.}\end{array}\right)$$

Pro alterius vero aequationis membro dextro erit primo

$$\frac{m\,a\cos.\eta}{w^3} = \mu\,a\cos.\eta(A + B\cos.\eta + C\cos.2\eta + D\cos.3\eta + \text{etc.})$$

siue facta euolutione

$$\frac{m\,a\cos.\eta}{w^3} = \mu\left(\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}B + A\cos.\eta + \tfrac{1}{2}B\cos.2\eta + \tfrac{1}{2}C\cos.3\eta + \text{etc.} \\ \quad + \tfrac{1}{2}C\cos.\eta + \tfrac{1}{2}D\cos.2\eta + \tfrac{1}{2}E\cos.3\eta + \text{etc.}\end{array}\right)$$

Pro altera vero eiusdem membri parte, quae est $-\frac{mv}{w^3}$, tuto assumere licet $v = 1$, quoniam supponimus, actione Veneris sublata, Terram in circulo esse progressuram; sicque ista pars dabit,

$$-\mu(A + B\cos.\eta + C\cos.2\eta + D\cos.3\eta + \text{etc.})$$

Hanc ob rem si pro vtraque parte iunctim sumta ponamus hanc seriem:

$$\mu(A' + B'\cos.\eta + C'\cos.2\eta + D'\cos.3\eta + \text{etc.}) \text{ erit.}$$

$$A' = \tfrac{1}{2}aB - A;\; B' = \tfrac{1}{2}a(2A + C) - B;\; C' = \tfrac{1}{2}a(B + D) - C$$

$$D' = \tfrac{1}{2}a(C + E) - D;\; E' = \tfrac{1}{2}a(D + F) - E;\; \text{etc.}$$

cui ergo expressioni: $\mu(A' + B'\cos.\eta + C'\cos.2\eta + \text{etc.})$ aequale esse debet membrum sinistrum

$$\frac{ddv - v\,d\Phi^2}{d\theta^2} + \frac{1 + m}{vv} + \frac{m\cos.\eta}{aa}.$$

§. 8. Incipiamus nunc ab euolutione primae aequationis, et quoniam assumimus Terram sine actione Veneris

neris in circulo motu vniformi esse processuram in distantia media $= 1$, ita vt etiam foret $\Phi = \theta$, ideoque $\frac{d\Phi}{d\theta} = 1$; nunc accedente actione Veneris hae quantitates quasi infinite parum immutabuntur. Statuamus ergo tum fore

$$v = 1 + \mu p \text{ ac } \frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu q;$$

vnde in compositione membra, quae continerent $\mu^2$, tuto omitti poterunt. Cum igitur sit

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\mu dp}{d\theta} \text{ et } \frac{dd\Phi}{d\theta^2} = \frac{\mu dq}{d\theta},$$

oritur hinc sequens aequatio:

$$\frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{d\theta^2} + \frac{m}{aa}\text{fin. }\eta = \frac{2\mu dp + \mu dq}{d\theta} + \frac{m}{aa}\text{fin. }\eta$$
$$= \frac{ma}{w^3}\text{fin. }\eta.$$

Pro cuius parte dextra scribamus hanc seriem:

$$\mu(\mathfrak{B}\text{ fin. }\eta + \mathfrak{C}\text{ fin. }2\eta + \mathfrak{D}\text{ fin. }3\eta + \mathfrak{E}\text{ fin. }4\eta + \text{etc.}$$

ita vt ob resolutionem huius membri iam supra traditam sit

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}a(2\text{A} - \text{C});\ \mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}a(\text{B} - \text{D});\ \mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}a(\text{C} - \text{E});$$
$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}a(\text{D} - \text{F});\ \mathfrak{F} = \tfrac{1}{2}a(\text{E} - \text{G});\ \text{etc.}$$

atque hinc aequatio resoluenda erit

$$\frac{2dp + dq}{d\theta} + \frac{m}{\mu aa}\text{fin. }\eta = \mathfrak{B}\text{ fin. }\eta + \mathfrak{C}\text{ fin. }2\eta + \mathfrak{D}\text{ fin. }3\eta + \text{etc.}$$

vbi notetur esse $\frac{m}{\mu aa} = \frac{(1 + aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$, quem numerum breuitatis gr. per litteram $k$ designemus, ita vt sit $k = 3,592551$, et nostra aequatio nunc erit

$$\frac{2dp + dq}{d\theta} + k\text{ fin. }\eta = \mathfrak{B}\text{ fin. }\eta + \mathfrak{C}\text{ fin. }2\eta + \mathfrak{D}\text{ fin. }3\eta + \text{etc.}$$

quam igitur integrari oportet.

§. 9. Quoniam hic duo anguli $\eta$ et $\theta$ insunt, nosse oportet relationem $d\eta$ et $d\theta$. Erat autem

 $\eta = \Psi$

$$\eta = \psi - \Phi, \text{ unde fit } \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{d\Phi}{d\theta}.$$

Hoc autem loco vtrumque motum Terrae ac Veneris vt vniformem spectare licet, ita vt sit $\frac{d\Phi}{d\theta} = 1$. Pro Venere autem, eius motus diurnus in tabulis exhibetur $= 1°, 36', 9'' = 5769''$, dum pro Terra est $59', 8'' = 3548''$. Quocirca habemus

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{5769}{3548}, \text{ vnde fit } \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{2221}{3548}.$$

Ponamus autem

$$d\theta = i\,d\eta, \text{ eritque } i = \frac{3548}{2221} = 1,597479.$$

Nunc igitur manifestum est, aequationem nostram, per $d\theta = i\,d\eta$ multiplicatam, euadere integrabilem; reperietur enim

$$2p + q - ik \cos.\eta = \Delta - i\mathfrak{B}\cos.\eta - \tfrac{1}{2}i\mathfrak{C}\cos.2\eta - \tfrac{1}{3}i\mathfrak{D}\cos.3\eta - \text{etc.}$$

ex qua propterea fit

$$q = \Delta - 2p + i(k - \mathfrak{B})\cos.\eta - \tfrac{1}{2}i\mathfrak{C}\cos.2\eta - \tfrac{1}{3}i\mathfrak{D}\cos.3\eta - \text{etc.}$$

§. 10. Aggrediamur iam posteriorem aequationem, pro qua notetur fore $\frac{ddv}{d\theta^2} = \frac{\mu\,ddp}{d\theta^2}$, tum vero

$$\frac{vd\Phi^2}{d\theta^2} = 1 + \mu(2q + p), \text{ et } \frac{1+m}{vv} = \frac{1+m}{1+2\mu p}$$

siue supra et infra per $1 - 2\mu p$ multiplicando erit

$$\frac{1+m}{vv} = 1 + m - 2\mu p$$

quibus valoribus substitutis aequationis nostrae membrum sinistrum erit

$$\frac{\mu\,ddp}{d\theta^2} - \mu(3p + 2q) + m + \frac{m\cos.\eta}{aa}.$$

Quod si iam per $\mu$ dividamus, et loco $\frac{m}{\mu aa} = 3,592551$ scribamus $k$, loco $\frac{m}{\mu} = 1,880217$ vero scribamus $l$, posterior aequatio hanc induet formam:

$\frac{ddp}{d\theta^2} - 3p + 2q + l + k \cos.\eta = A' + B' \cos.\eta + C' \cos.2\eta + D' \cos.3\eta$ etc.
in qua si loco $q$ valor ante inuentus substituatur, fiet

$$\frac{ddp}{d\theta^2} - 3p + l + k \cos.\eta = A' + B' \cos.\eta + C' \cos.2\eta + D' \cos.3\eta + \text{etc.}$$
$$+ 4p - 2\Delta + 2i(k - \mathfrak{B}) \cos.\eta - \tfrac{1}{2} i \mathfrak{C} \cos.2\eta - \tfrac{2}{3} i \mathfrak{D} \cos.3\eta - \text{etc.}$$

siue $\frac{ddp}{d\theta^2} + p = 2\Delta - l + A' + (2i(k - \mathfrak{B}) - k + B') \cos.\eta + (C' - \tfrac{1}{2} i \mathfrak{C}) \cos.2\eta$
$$+ (D' - \tfrac{2}{3} i \mathfrak{D}) \cos.2\eta + (E' - \tfrac{3}{4} i \mathfrak{E}) \cos.3\eta + \text{etc.}$$

cuius loco breuitatis gratia scribamus

$$\frac{ddp}{d\theta^2} + p = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' \cos.\eta + \mathfrak{C}' \cos.2\eta + \mathfrak{D}' \cos.3\eta + \text{etc.}$$

ita vt sit

$$\mathfrak{A}' = 2\Delta - l + A'; \quad \mathfrak{B}' = 2i(k - \mathfrak{B}) - k + B'; \quad \mathfrak{C}' = C' - i\mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{D}' = D' - \tfrac{2}{3} i \mathfrak{D}; \quad \mathfrak{E}' = E' - \tfrac{2}{4} i \mathfrak{E}; \quad \text{etc.}$$

§. 11. Manifestum autem est, huic aequationi satisfieri, statuendo

$$p = \alpha + \beta \cos.\eta + \gamma \cos.2\eta + \delta \cos.3\eta + \text{etc.}$$

vnde ob $\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{1}{i}$ membrum sinistrum resoluitur in has duas series:

$$\frac{ddp}{d\theta^2} = -\frac{\beta}{ii} \cos.\eta - \frac{4\gamma}{ii} \cos.2\eta - \frac{9\delta}{ii} \cos.3\eta - \frac{16\epsilon}{ii} \cos.4\eta - \text{etc.}$$
$$+ p = \alpha + \beta \cos.\eta + \gamma \cos.2\eta + \delta \cos.3\eta + \epsilon \cos.4\eta + \text{etc.}$$

ita vt, singulis ambarum partium membris seorsim aequatis, se prodeant sponte sequentes determinationes:

$$\alpha = \mathfrak{A}'; \quad \beta(1 - \tfrac{1}{ii}) = \mathfrak{B}'; \quad \gamma(1 - \tfrac{4}{ii}) = \mathfrak{C}'; \quad \delta(1 - \tfrac{9}{ii}) = \mathfrak{D}'; \quad \text{etc.}$$

ideoque

$$\alpha = \mathfrak{A}'; \quad \beta = \frac{\mathfrak{B}'}{1 - \frac{1}{ii}}; \quad \gamma = \frac{\mathfrak{C}'}{1 - \frac{4}{ii}}; \quad \delta = \frac{\mathfrak{D}'}{1 - \frac{9}{ii}}; \quad \epsilon = \frac{\mathfrak{E}'}{1 - \frac{16}{ii}}.$$

§. 12. Cum igitur ex valoribus litterarum A, B, C, D, etc. supra §. 6. inuentis facile colligi queant valores

lores deriuati A', B', C', D', etc. tum vero 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, etc. ac denique 𝔄', 𝔅', ℭ', 𝔇', etc. ex iis iam deduci possunt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. vnde porro innotescunt valores $p$ & $q$, quarum prior praebet exiguam illam mutationem quam actio Veneris in distantia Terrae et Sole producit, cum sit $v = + \mu p$. Denique ex valore $p$ deriuatur valor ipsius $q$ quem breu. gr. statuamus:

$$q = \alpha' + \beta' \operatorname{cof.} \eta + \gamma' \operatorname{cof.} 2\delta + \delta' \operatorname{cof.} 3\eta + \text{etc.}$$

ita vt sit

$$\alpha' = \Delta - 2\alpha; \ \beta' = i(k - \mathfrak{B}) - 2\beta; \ \gamma' = -2\gamma - \tfrac{1}{2} i \mathfrak{C},$$
$$\delta' = -2\delta - \tfrac{1}{3} i \mathfrak{D}; \ \varepsilon' = -2\varepsilon - \tfrac{1}{4} i \mathfrak{E}; \text{ etc.}$$

Inuento autem valore $q$ inde colligitur feries

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu \alpha' + \mu \beta' \operatorname{cof.} \eta + \mu \gamma' \operatorname{cof.} 2\eta + \text{etc.}$$

ex qua pro quouis tempore vera Solis longitudo concluditur fore

$$\Phi = (1 + \mu \alpha')\theta + \mu i \beta' \operatorname{fin.} \eta + \tfrac{1}{2} \mu i \gamma' \operatorname{fin.} 2\eta + \tfrac{1}{3} \mu i \delta' \operatorname{fin.} 3\eta + \text{etc.}$$

vbi pars prima $(1 + \mu \alpha')\theta$ exhibet longitudinem mediam Terrae, quam quia supponimus esse exacte $= \theta$, sequitur esse debere $\alpha' = 0$. Reliquae autem partes continent inaequalitates motus periodici, quae ergo pendent a finibus angulorum $\eta$, $2\eta$, $3\eta$, $4\eta$, etc. Hoc modo sequens tabula perturbationem est facta.

---

VLTE-

# Tabula Perturbationum in diſtantia et motu Terrae, ab actione Veneris, in eam agente, ortarum.

## Argumentum

### Elongatio Veneris a Terra.

| Signa / Grad. | 0. | | I. | | II. | | III. | | IV. | | V. | | Signa / Grad. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Long. − | Diſt. + | Long. − | Diſt. + | Long. − | Diſt. − | Long. + | Diſt. − | Long. + | Diſt. − | Long. + | Diſt. + | |
| 0 | 0, 0 | 20 | 4, 0 | 5 | 0, 3 | 14 | 6, 9 | 16 | 11, 1 | 1 | 8, 4 | 18 | 30 |
| 1 | 0, 2 | 20 | 4, 0 | 4 | 0, 1 | 14 | 7, 1 | 16 | 11, 1 | + | 8, 1 | 19 | 29 |
| [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 7, 2 | 15 | 11, 2 | 0 | 7, 9 | 19 | 28 |

# VLTERIORES DISQVISITIONES DE TEMPORE PERIODICO COMETAE, ANNO 1770 OBSERVATI.

Auctore

*A. I. LEXELL.*

§. 1.

Quamuis argumenta, quibus pro ſtabiliendo tempore Periodico Cometae Anno 1770 obſeruati, in priori hac de re disquiſitione, vſus ſum, adeo ſtringentia mihi eſſe videantur, vt concluſioni a me inuentae veriſimilitudinem ſaltem inſignem, conciliare debeant; tamen aegre ferre non potui, quod haec concluſio, vtpote omnino inexſpectata et valde ſingularis, apud Aſtronomos fidem vix ac ne vix quidem, inuenire potuerit. Quemadmodum enim pro re valde ſingulari iam haberi mereatur, quod ex obſeruationibus alicuius Cometae in vicinia eius ad Perihelium factis, tempus eius Periodicum determinari potuerit, ita vix quidem primo intuitu credibile videri debuit, quod Cometa hic Anno 1770 obſeruatus, Periodum ſuam circa Solem, annis quinque cum dimidio, abſolueret; praeprimis quum nullum eſſet indicium hunc Cometam vnquam antea terricolis fuiſſe viſum. Vt igitur hoc in negotio, non ſo-

lum mihimet ipsi satisfacerem; sed etiam eos Astronomorum conuincere possem, quibus mea determinatio adhuc videbatur dubia, nouo examine eandem stabilire et confirmare constitui. Cum igitur in prioribus ostendissem, Elementa a me inuenta, quae tempori Periodico quinque annorum cum dimidio erant accommodata, obseruationibus Cometae saltem secunda eius apparitione factis, egregie satisfacere, nunc ad plenam conuictionem adhuc desiderabatur, vt ostendi posset, aucto aliquantum tempore Periodico Cometae, eiusmodi Elementa pro eius orbita inueniri, quae non aeque bene obseruationibus satisfaciendis inseruirent, quoque maius augmentum tempori Periodico tribuatur, eo insigniores obseruationibus induci errores. Qua autem ratione hoc argumentum instruximus, id cum alia occasione iam a nobis succincte sit expositum, prolixius quidem hic tradere constituimus; idque eo potius quod in hac disquisitione varia inuenimus, quae opinionibus in priori de hoc argumento Dissertatione traditis, emendandis & corrigendis inseruire debeant. In exponenda autem serie nostrorum argumentorum, eundem sequemur ordinem, quem in nostris meditationibus secuti sumus, vt pateat quam exacte et scrupulose nostram demonstrationem adornare, conati sumus.

§. 2. Elementa pro orbita Cometae, in priori nostra Dissertatione allata, licet obseruationibus Cometae secunda eius apparitione factis, tam bene satisfaciant, vt maior consensus desiderari nequeat, tamen ab illis, quae prima apparitione mense nimirum Iunii Anno 1770, institutae sunt, aliquanto magis abludunt; vnde iure concludi posse mihi videbatur, propter actionem telluris in nostrum

ſtrum Cometam, binas portiones orbitae ante et poſt eius ad tellurem noſtram approximationem, deſcriptas, non prorſus conuenire, ſeu ad eandem Sectionem Conicam non pertinere. In illa autem opinione eo magis confirmatus fui, quod tum quidem nullum mihi pateret medium, quo conſenſus harum obſeruationum obtineri poſſet, licet vti infra videbimus, poſtmodum eiusmodi Elementa inuenerim, quae tantum non omnibus huius Cometae obſeruationibus ſatisfaciunt. Quum igitur perſuaſus eſſem, non admodum ſcrupuloſe in eo eſſe elaborandum, vt obſeruationes prima et ſecunda Cometae apparitione factae, inter ſe redderentur conſentientes; primum quidem examinandum tantummodo eſſe exiſtimaui, quam Latitudinem Elementa, ſolis obſeruationibus ſecundae apparitionis ſatisfacientia, admitterent. Hunc in finem, quia vti ex priori Diſſertatione conſtat, definita Longitudine Cometae, per ipſas obſeruationes loci Geocentrici, inclinatio orbitae ſaltem intra limitem vnius minuti primi, cognoſcatur; examen noſtrum ita inſtruximus, vt aſſumtis pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae certis hypotheſibus, pro binis obſeruationibus ſecundae apparitionis, quaereremus loca Cometae Heliocentrica, tum vero aſſumto certo valore excentricitatis, pro orbita Cometae, reliqua huius orbitae Elementa inueſtigaremus, cuius methodi adumbrationem, nuper peculiari Schediaſmate huic volumini Actorum inſerendo adornauimus. Iam ſi tempus Perihelii per vtramque obſeruationem definitum, non congrueret, valorem excentricitatis immutauimus ita, vt tandem ex vtraque obſeruatione tempus pro Perihelio Cometae prorſus redderetur congruum. Elementis autem ſic inuentis in vſum adhibitis, computauimus loca Cometae Geocentrica pro temporibus aliarum obſer-

obſeruationum, quo ipſo innotuit, vtrum obſeruationes cum calculo conſentirent, nec ne.

§. 3. Poſita igitur Longitudine Nodi Aſcendentis $= 4^s. 12^\circ. 40'$. et inclinatione orbitae $= 1^\circ. 35'. 30''$, quaerendam inſtituimus orbitam, quae binis ſequentibus obſervationibus exacte ſatisfaceret:

| | | Longit. Com. obſerv. | Latit. Com. |
|---|---|---|---|
| Aug. 10. | $14^h. 30'. 23''$ | $3^s. 9^\circ. 32'. 42''$ | $1^\circ. 9'. 18''$ A |
| Octob. 2. | 16. 38. 50 | 4. 10. 41. 52 | 1. 10. 10 A |

Methodo igitur in prioribus deſcripta ad haec deuenimus Elementa: Elongatio Perihelii a Nodo deſcendente $= 43^\circ. 14'. 26''$. Tempus Perihelii 1770 13, 1606 Aug., Excentricitas orbitae $= 0, 7822473$, Semiparameter orbitae $= 1, 1988111$, ex quo colligitur tempus Periodicum Cometae $= 5, 4291$ Anni. His autem Elementis adhibitis, ſequentia per computum eliciuntur loca Cometae Geocentrica:

| | | Longit. Com. obſerv. | Latit. Comet. |
|---|---|---|---|
| Aug. 2. | $15^h. 3'. 15''$ | $3^s. 6^\circ. 4'. 19''$ | $49'. 11''$ A |
| 29. | 15. 21. 53 | 3. 21. 1. 12 | $1^\circ. 21. 1.$ A |

quarum determinationum diſſenſus ab obſervationibus, non omnino maior eſt, quam vt facile admitti queat.

§. 4. Nunc vero ſi ponatur Longitudo Nodi Aſcendentis $= 4^s. 12^\circ. 20'$ et inclinatio orbitae $1^\circ. 34'. 30''$, pro ſequentibus obſeruationibus:

| | | Longit. Com. obſerv. | Latit. Comet. |
|---|---|---|---|
| Aug. 7. | $14^h. 49'. 19''$ | $3^s. 8^\circ. 6'. 40''$ | $1^\circ. 3'. 35''$ A |
| Octob. 1. | 15. 23. 22 | 4. 10. 12. 6 | 1. 9. 51 |

Ele-

Elementa isthaec inueniuntur: Elongatio Perihelii a Nodo descendente $= 44^\circ. 8'. 40''$; Tempus Perihelii 1770, Aug. 13, 7155; Excentricitas orbitae $= 0, 7908100$; Semiparameter orbitae $= 1, 2085528$; hinc Tempus Periodicum Cometae $= 5, 7944$ Anni. Pro supra allatis autem obseruationibus dier. 2 et 29 Aug. Longitudines Cometae Geocentricae ex calculo erunt: $3^s. 6^\circ. 2'. 50''$ et $3^s. 21^\circ. 0'. 51''$; quae cum obseruatis pulchre admodum consentiunt. Tum vero si, eadem pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae facta hypothesi, itemque in vsum vocata obseruatione die 7. Aug. instituta, loco obseruationis pro 1 Octob. supra allatae, ista adhibeatur, qua pro 1 Octob. $16^h. 33'. 28''$, inuenta est Longitudo Cometae $4^s. 10^\circ. 13'. 54''$ et Latitudo $1^\circ. 10'. 4''$ A, Elementa orbitae hunc in modum determinabuntur: Elongatio Perihelii a Nodo ascendente $= 43^\circ. 54'. 18''$; Tempus Perihelii 1770 Aug. 13, 6320; Excentricitas orbitae $= 0, 7817800$; Semiparameter orbitae $= 1, 2031183$, indeque Tempus Periodicum Cometae $= 5\ 4430$. Ex quibus Elementis, pro modo citatis temporibus obseruationum, diebus 2 et 29 Augusti factarum, sequentes eliciuntur Longitudines Cometae: $3^s. 6^\circ. 4'. 20''$. et $3^s. 20^\circ. 58'. 44''$; quae quidem prius allatis aliquanto magis erroneae sunt, interim nec in his errores iusto grauiores habendae sunt. In Latitudines Cometae ex Elementis deducendas, necesse non erat, vt inquireremus, quia illas ab insignioribus aberrationibus immunes esse, facile praesumi potuit.

§. 5. His igitur speciminibus iam equidem satis perspicuum redditur, Elementa quae obseruationibus Cometae, secunda eius apparitione factis, satisfaciant, aliquali

 cum

cum Latitudine accipi posse, eaque aliquantum diuersa prodire, prouti hypothesis pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae, alia et alia statuatur, vel diuersae in vsum vocentur obseruationes. Hinc autem suspicio mihi oborta est, an non fieri posset, vt Elementorum in priori Disquisitione inuentorum aliquanta immutatione, id praestari posset, vt obseruationes, prima Cometae apparitione factae, ad consensum redigerentur cum illis, quae secunda apparitione institutae habentur. Aliquot itaque hunc in finem institutis tentaminibus, ad eiusmodi deueni Elementa, quae obseruationibus huius Cometae tantum non omnibus, ita satisfacerent, vt maximi errores vix duo minuta prima excederent. Antequam vero horum Elementorum expositionem tradam, haud praeter rem erit, vt primum succinctam adumbrationem Methodi, in hac disquisitione adhibitae, exponam.

§. 6. Quum igitur principalis difficultas hoc in negotio inde oriatur, quod binae quaepiam obseruationes primae apparitionis, vtpote illae quae 15 & 29 Iunii institutae sunt, reduci debeant tam ad consensum inter se, quam cum illis, quae ab initio Augusti, vsque ad initium Octobris factae habentur; primum quidem de eo imprimis solliciti fuimus, vt obseruationes diebus 15 & 29 Iunii inter se redderentur conspirantes. Ne autem consideratio Latitudinis hanc disquisitionem turbaret, illius primo quidem nullum habuimus respectum, vsque dum Elementa ita adornare licuerit, vt Longitudinibus Cometae satisfacerent. Scilicet pro tempore Periodico Cometae certum adhibentes valorem, quantitatem semiparametri quoque hypothesi effinximus, vnde his binis quantitatibus datis ipsa species orbi-

orbitae determinata habebatur. Deinde quum pro obſeruatione, die 29 Iunii inſtituta, determinatio Longitudinis Geocentricae praeprimis dependeat ab elongatione Cometae a terra e Sole viſa, in qua quidem ſi vno minuto ſecundo fuerit aberratum, inde in Elongationem Cometae a Sole e terra ſpectatam deriuabitur error 45″, priorem harum elongationem tamquam cognitam ſpectare licebit. Hinc ſi tempus Perihelii etiam pro cognito habeatur, ope obſeruationis die 29 Iunii inſtitutae, Elongatio Perihelii a nodo innoteſcet. Nam ſi detur tempus Perihelii, dabitur pro obſeruatione die 29 Iunii angulus anomaliae, quem exprimamus littera $\theta$, elongatione Perihelii a Nodo per $\omega$ indicata; dabit igitur $\theta - \omega$ elongationem Cometae a Nodo, quam ob inclinationem orbitae proxime cognitam, paruula quantitate $\delta$ ad elongationem in Ecliptica reducere licet, quae erit $\theta - \omega - \delta$. Porro ob datas longitudines Nodi et terrae, dabitur elongatio Nodi a terra e Sole viſa $= \eta$; hincque elongatio terrae a Cometa Heliocentrica $= \theta - \omega - \delta - \eta = \gamma$; ideoque ſi hic angulus $\gamma$ ſupponatur cognitus, viciſſim habebitur $\omega = \theta - \delta - \eta - \gamma$.

§. 7. **Exemplo autem res fiet illuſtrior.** Ponamus eſſe tempus Periodicum Cometae $= 5,585$ Annorum, et ſemiparametrum orbitae $= 1,2042869$, Tempusque Perihelii incidere in 13, 5400 Auguſti, pro 29 Iunii $11^h. 59'. 26''$ erit angulus anomaliae $= \theta = 78°. 9'. 3''$; tum vero, ob Longitudinem Nodi aſcendent $= 4^s. 12°. 20'. 0''$ et Solis $= 3^s. 8°. 6'. 25''$, eſt angulus $\eta = 34°. 13'. 35''$, porro eſt angulus paruulus $\delta = 35''$ et $\gamma = -1'. 53''$, ex quo obtinebitur $\omega = 43°. 56'. 46''$. Deinde pro 15 Iunii $11^h. 53'. 23''$, habetur angulus anomaliae $\theta = 90°. 15'. 41''$, vnde fit

$\theta - \omega = 46°. 18'. 55''$ et $\theta - \omega - \delta = 46° 18'. 17''$, atque est pro hoc tempore $\eta = 46°. 36'. 16''$, hinc fit $\gamma = - 1°. 17'. 59''$; vnde calculo instituto reperietur angulus elongationis inter Solem et Cometam e Sole visus $8°. 7'. 53''$, ideoque Longitudo Cometae $9^s. 2°. 51'. 37''$.

§. 8. Nec hoc negotium eo ipso turberi censendum est, quod Longitudo Nodi nondum exacte sit definita, scilicet elongatio Perihelii a Nodo certae hypothesi Longitudinis Nodi accommodata est, quantumque posterius horum Elementorum immutatur, tantam etiam mutationem in priori statuendam esse, oportet. Exactum autem iudicium de vera quantitate Longitudinis Nodi et inclinationis orbitae ex Latitudinibus Cometae diebus 15 et 29 Iunii obseruatis, formandum est, scilicet haec Elementa ita assumenda sunt, vt, quantum fieri liceat, istis Latitudinibus satisfiat.

§. 9. Elementa igitur hoc modo definita, quibus, pro orbita Cometae determinanda, adquiecendum esse existimaui, ad sequentia reducuntur capita:

I. Longitudo Nodi Ascendentis $= 4^s. 12°. 0'$.

II. Inclinatio orbitae ad Eclipticam $= 1°. 33'. 40''$.

III. Elongatio Nodi descendentis a Perihelio $= 44°. 17'. 3''$, hincque Longitudo Perihelii $11^s. 26°. 16'. 25''$.

IV. Tempus transitus Cometae per Perihelium, Anno 1770 die 13, 5450 Augusti, siue $13^h. 5'$ circiter.

V. Distantia Cometae in Perihelio suo a Sole $= 0,6743815$, dum nimirum distantia media Solis a terra vnitate exprimitur.

VI.

VI. Semiaxis principalis orbitae a Cometa descriptae = 3, 1478606 distantiarum huiusmodi mediarum, vnde colligitur tempus Periodicum Cometae = 5,585 Annorum, seu 5 Annor. 7 Mensium circiter. Reliqua Elementa orbitae, prouti semiparameter et excentricitas, ex his facile quidem colliguntur, interim tamen si cuipiam volupe fuerit, calculos nostros examini subiicere, horum Elementorum valores cum adiectis eorum Logarithmis heic adponere non superfluum erit:

Semiparamet. orbitae = 1, 2042869, Log. = 0, 0807300.
Excentric. orbitae = 0, 7857652, Log. = 9, 8952927.
Distantia Perih. = 0, 67438815, Log. = 9, 8289057.
Semiaxis orbitae = 3, 1478606, Log. = 0, 4980155.
Distantia Aphel. = 5, 6213397, Log. = 0, 7498399.

§. 10. His igitur Elementis stabilitis loca Cometae Geocentrica per calculum elicita se habebunt, vti sequens Tabula declarat, quae eorum comparationem cum obseruationibus simul ob oculos ponit:

| Tempus medium Parisinum. | Long. Comet ex calculo. | Differ. ab obserr. | Latit. Comet. ex calculo. | Differ. ab obserr. |
|---|---|---|---|---|
| Iunii 14.11$^h$.29$'$.48$''$ | 9$^s$.2°.48$'$. 1$''$ | − 17$''$ | 6°.40$'$.54$''$ B | − 30$''$ |
| 15.11. 23.22 | - 2. 51. 54 | − 5 | 6. 57. 51 | − 36 |
| 17.11. 11.33 | - 3. 0. 52 | − 54 | 7. 38. 37 | + 14 |
| 20.10. 40.48 | - 3. 17. 2 | − 50 | 9. 5. 29 | + 9 |
| 21.10. 27.45 | - 3. 24. 26 | −1$'$. 9 | 9. 45. 27 | − 51 |
| 22.12 9.36 | - 3. 34. 9 | − 26 | 10. 39. 54 | − 49 |
| 24.12. 3.18 | - 3. 59. 51 | + 7 | 12. 59. 52 | + 3 |
| 25.13. 27.55 | - 4. 21. 21 | + 21 | 14. 54. 37 | − 41 |

 Tem-

| Tempus medium Parisinum. | Longit. Comet. ex calculo. | Differ. ab observ. | Latit. Comet. ex calculo. | Differ. ab observ. |
|---|---|---|---|---|
| Iunii 27.$13^{h}$.$13'$.$17''$ | $9^{s}$. $5^{\circ}$.$36'$. $6''$ | − $1'$.$12''$ | $21^{\circ}$. $8'$.$38''$ B | + [illegible] |
| 28.10. 46. 34 | - 6. 43. 58 | + 2. 0 | 26. 30. 39 | − $1'$. [illegible] |
| 29.10. 2. 51 | - 9. 22. 1 | + 1. 25 | 36. 48. 4 | − 4. 1[illegible] |
| - 10. 32. 33 | - 9. 27. 31 | + 44 | 37. 6. 30 | − 4. 5[illegible] |
| - 11. 59. 26 | - 9. 42. 30 | + 15 | 38. 0. 37 | − 3. [illegible] |
| 30.12. 3. 11 | *- 21. 1. 45 | − 37. 17 | 61. 22. 26 | − $1^{\circ}$.$18'$. [illegible] |
| Iulii 1.12. 3. 23 | * 1. 29. 59. 15 | − $4^{\circ}$.$17'$.$37''$ | 70. 48. 44 | + 20. 5[illegible] |
| 3.11. 3. 45 | * 2. 27. 40. 38 | + 1. 35. 44 | 25. 18. 50 | + 14. 3[illegible] |
| Aug. 2.15. 3. 15 | 3. 6. 2. 4 | + 28 | 49. 59 A | + [illegible] |
| 15. 39. 12 | - 6. 2. 37 | + 21 | 50. 4 | + 1[illegible] |
| 3.14. 45. 9 | - 6. 24. 32 | + 43 | 52. 46 | + 5[illegible] |
| 15. 19. 43 | - 6. 25. 9 | + 32 | 52. 51 | + [illegible] |
| 15. 24. 9 | - 6. 25. 13 | + 37 | 52. 52 | + 1[illegible] |
| 4.14. 12. 48 | - 6. 47. 46 | − 18 | 56. 4 | − 2[illegible] |
| 14. 21. 52 | - 6. 47. 53 | + 50 | 56. 5 | + 2[illegible] |
| 14. 38. 22 | - 6. 48. 11 | + 49 | 56. 7 | + 2[illegible] |
| 14. 54. 12 | - 6. 48. 26 | + 48 | 56. 9 | + 3[illegible] |
| 15. 7. 25 | - 6. 48. 39 | + 57 | 56. 11 | − 2[illegible] |
| 15. 33. 8 | - 6. 49. 5 | + 1. 3 | 56. 14 | − 1[illegible] |
| 5.14. 38. 43 | - 7. 13. 3 | + 48 | 58. 50 | + 2[illegible] |
| 14. 55. 3 | - 7. 13. 22 | + 1. 6 | 58. 52 | + 3[illegible] |
| 15. 13. 28 | - 7. 13. 45 | + 36 | 58. 54 | + 3[illegible] |
| 15. 28. 24 | - 7. 14. 3 | + 40 | 58. 55 | + 2[illegible] |
| 6.14. 29. 42 | - 7. 38. 45 | + 40 | 1. 1. 16 | + [illegible] |
| 14. 45. 26 | - 7. 39. 1 | + 47 | 1. 1. 17 | − [illegible] |
| 15. 0. 5 | - 7. 39. 18 | + 50 | 1. 1. 19 | + 22[illegible] |
| 7.14. 49. 19 | - 8. 5. 59 | + 41 | 1. 3. 34 | + 1[illegible] |
| 14. 56. 9 | - 8. 6. 6 | + 44 | 1. 3. 35 | + 13[illegible] |

Tem-

| Tempus medium Parisinum. | Longit. Com. ex calculo. | Differ. ab observ. | Latit. Comet. ex calculo. | Diff. ab observ. |
|---|---|---|---|---|
| Aug. 8.14$^h$.20$'$.13$''$ | 3$^s$. 8°.33$'$.17$''$ | +12$''$ | 1°. 5$'$.35$''$ A | +1$'$. 1$''$ |
| 14. 20. 29 | - 8. 33. 17 | +57 | 1. 5. 35 | +1. 3 |
| 14. 51. 12 | - 8. 33. 52 | +21 | 1. 5. 36 | +1. 4 |
| 15. 10. 28 | - 8. 34. 14 | +35 | 1. 5. 37 | +1. 6 |
| 9.14. 48. 10 | - 9. 2. 40 | NB.+1$'$.50 | 1. 7. 29 | +2. 4 |
| 10.14. 14. 27 | - 9. 31. 44 | +52 | 1. 9. 9 | +4 |
| 14. 21. 43 | - 9. 31. 53 | +49 | 1. 9. 9 | +4 |
| 14. 30. 23 | - 9. 32. 4 | +38 | 1. 9. 10 | +8 |
| 14. 39. 32 | - 9. 32. 16 | +41 | 1. 9. 11 | +13 |
| 14. 46. 16 | - 9. 32. 25 | — 8 | 1. 9. 12 | +52 |
| 15. 0. 49 | - 9. 32. 43 | +26 | 1. 9. 13 | +33 |
| 15. 19. 55 | - 9. 33. 7 | +45 | 1. 9. 14 | +13 |
| 11 14. 23. 23 | -10. 2. 37 | +25 | 1. 10. 40 | +11 |
| 14. 31. 49 | -10. 2. 47 | +31 | 1. 10. 40 | +15 |
| 14. 45. 6 | -10. 3. 5 | +49 | 1. 10. 41 | +1. 32 |
| 14. 54. 20 | -10. 3. 17 | +52 | 1. 10. 41 | +1. 31 |
| 12.14. 46. 25 | -10. 34. 43 | + 5 | 1. 12. 4 | +48 |
| 15. 9. 4 | -10. 35. 13 | +39 | 1. 12. 5 | +1. 8 |
| 15. 27. 46 | -10. 35. 36 | +20 | 1. 12. 7 | +14 |
| 15. 30. 25 | -10. 35. 40 | + 6 | 1. 12. 7 | +1. 25 |
| 14.14. 37. 29 | -11. 40. 4 | +21 | 1. 14. 25 | +1. 0 |
| 14. 58. 39 | -11. 40. 33 | +22 | 1. 14. 26 | +1. 3 |
| 15. 18. 39 | -11. 41. 1 | —21 | 1. 14. 27 | +1. 5 |
| 15. 28. 39 | -11. 41. 15 | —20 | 1. 14. 28 | +1. 10 |
| 15. 15. 43. 33 | -12. 15. 37 | —41 | 1. 15. 26 | +1. 17 |
| 15. 56. 37 | -12. 15. 55 | —29 | 1. 15. 26 | +1. 19 |
| 16. 4. 32 | -12. 16. 6 | —10 | 1. 15. 27 | +1. 19 |
| 18.14. 24. 32 | -13. 59. 37 | —13 | 1. 17. 39 | +56 |

Tem-

| Tempus medium Parisinum. | Longit. Com. ex calculo. | Diff. ab observ. | Latit. Com. ex calculo. | Diff. ab observ. |
|---|---|---|---|---|
| Aug. 18. 14^h. 43'. 23" | 3^s. 14°. 0'. 5" | − 0" | 1°. 17'. 39" A | + 1'. 2" |
| 15. 4. 7 | - 14. 0. 37 | + 20 | 1. 17. 40 | + 1. 15 |
| 19. 14. 33. 18 | - 14. 36. 16 | − 13 | 1. 18. 37 | + 41 |
| 14. 57. 41 | - 14. 36. 52 | − 11 | 1. 18. 38 | + 50 |
| 26. 15. 39. 38 | - 19. 3. 59 | − 15 | 1. 20. 5 | + 40 |
| 16. 16. 4 | - 19. 4. 56 | − 52 | 1. 20. 5 | + 51 |
| 28. 14. 44. 8 | - 20. 20. 27 | − 45 | 1. 20. 5 | + 50 |
| 15. 8. 38 | - 20. 21. 5 | − 25 | 1. 20. 5 | + 59 |
| 29. 15. 21. 53 | - 21. 0. 31 | − 28 | 1. 20. 3 | + 2 |
| 15. 43. 31 | - 21. 1. 6 | − 28 | 1. 20. 3 | + 38 |
| 16. 3 59 | - 21. 1. 37 | − 9 | 1. 20. 3 | + 37 |
| 16. 25. 17 | - 21. 2. 8 | − 0 | 1. 20. 3 | + 36 |
| 30. 14. 48. 22 | - 21. 38. 44 | + 28 | 1. 19. 58 | + 58 |
| 15. 6. 15 | - 21. 39. 14 | + 51 | 1 19. 58 | + 1. 0 |
| 15. 26. 31 | - 21. 39. 46 | + 41 | 1. 19. 58 | + 1. 2 |
| 31. 14. 38. 25 | - 22. 17. 49 | − 33 | 1. 19. 50 | + 33 |
| 15 19. 4 | - 22. 18. 54 | − 38 | 1. 19. 50 | + 35 |
| Sept. 4. 15. 5. 20 | - 24. 53. 46 | − 1'. 5 | 1. 19. 2 | + 21 |
| 15. 15. 42 | - 24. 53. 56 | − 45 | 1. 19. 2 | + 23 |
| 15. 32. 42 | - 24. 54. 28 | − 47 | 1. 19. 2 | + 29 |
| 15. 48. 29 | - 24. 54. 54 | − 58 | 1. 19. 2 | + 32 |
| 16. 11. 28 | - 24. 55. 30 | − 19 | 1. 19. 1 | + 50 |
| 5. 14. 48. 37 | - 25. 31. 44 | − 37 | 1. 18. 47 | + 58 |
| 15. 2. 43 | - 25. 32. 6 | − 59 | 1. 18. 47 | + 56 |
| 15. 14. 55 | - 25. 32. 26 | − 1. 1 | 1. 18. 47 | + 57 |
| 8. 15. 57. 4 | - 27. 27. 41 | − 1. 9 | 1. 17. 51 | + 32 |
| 16. 5 45 | - 27. 27. 54 | − 1. 7 | 1. 17. 51 | + 33 |
| 9. 15. 6. 30 | - 28. 3. 52 | − 33 | 1. 17. 33 | + 49 |

Tem-

| Tempus medium Parisinum. | Longit. Comet ex calculo. | Differ. ab observ. | Lat. Comet. ex calculo. | Different. ab obseru. |
|---|---|---|---|---|
| Sept. 9. 15h. 22'. 5'' | 3s. 28°. 4'. 18'' | — — 44'' | 1°. 17'. 33'' | + 50'' |
| 15. 37. 23 | - 18. 4. 41 | — 1. 7 | 1. 17. 33 | + 51 |
| 10. 16. 26. 23 | - 28. 43. 15 | NB. — 2. 49 | 1. 17. 12 A | + 1. 52 NB. |
| 14. 14. 16. 26 | 4. 1. 5. 36 | — 1. 0 | 1. 15. 46 | + 32 |
| 14. 14. 33. 47 | - 1. 6. 1 | — 44 | 1. 15. 46 | + 36 |
| 15. 0. 21 | - 1. 6. 43 | — 37 | 1. 15. 45 | + 38 |
| 15. 42. 21 | - 1. 7. 50 | — 43 | 1. 15. 44 | + 41 |
| 17. 15. 53. 3 | - 2. 53. 13 | — 33 | 1. 14. 35 | + 17 |
| 16. 5. 15 | - 2. 53. 31 | — 36 | 1. 14. 35 | + 17 |
| 16. 13. 53 | - 2. 53. 43 | — 33 | 1. 14. 34 | + 19 |
| 18. 15. 30. 16 | - 3. 27. 6 | — 9 | 1. 14. 12 | + 46 |
| 15. 56. 6 | - 3. 27. 45 | — 18 | 1. 14. 12 | + 48 |
| 16. 9. 58 | - 3. 28. 4 | — 24 | 1. 14. 11 | + 51 |
| 19. 15. 19. 4 | - 4. 0. 37 | — 5 | 1. 13. 48 | — 46 |
| 15. 29. 50 | - 4. 0. 52 | — 5 | 1. 13. 46 | — 46 |
| 20. 15. 33. 45 | - 4. 34. 27 | — 10 | 1. 13. 35 | — 1. 0 |
| 29. 15. 23. 51 | - 9. 15. 53 | — 59 | 1. 9. 42 | + 34 |
| 15. 37. 50 | - 9. 16. 10 | — 1. 6 | 1. 9. 42 | + 1. 53 |
| 16. 39. 30 | - 9. 17. 24 | — 1. 30 | 1. 9. 41 | + 1. 12 |
| Oct. 1. 15. 23. 22 | - 10. 13. 31 | — 1. 25 | 1. 8. 54 | + 57 |
| 16. 33. 28 | - 10. 14. 55 | — 1. 1 | 1. 8. 53 | + 1. 11 |
| 2. 15. 43. 37 | - 10. 41. 59 | — 1. 9 | 1. 8. 29 | + 35 |
| 16. 38. 50 | - 10. 43. 5 | — 1. 13 | 1. 8. 29 | + 41 |

§. 11. Ex inſpectione huius Tabulae iam oppido liquet, Elementa a nobis inuenta adeo exacte cum obſeruationibus conſentire, vt vix vllibi diſſenſus maiores, quam duorum minutorum primorum, reperiantur, exceptis tamen obſeruationibus, quae diebus 30 Iunii, 1 et 3

 Iulii

Iulii institutae sunt, pro quibus errores omnino enormes emergunt. De his autem obseruationibus tenendum, quod, ipso Cel. *Messier* fatente, pro exactis reputari non queant; nam quae his diebus Cometae assignavit loca, illa per aestimationem solum determinata sunt, in quam omnino insignes errores irrepere potuerunt. Et quod speciatim die 1 Iulii institutam attinet, pro qua error in Longitudine integros quatuor gradus exsuperat; calculo inueni, quod si in declinatione Cometae aestimanda vnico Gradu a Cel. *Messier* fuerit aberratum, Longitudinem Cometae inde plus quam tribus Gradibus factam esse erroneam. Quod si vero quis existimauerit, insignes errores, qui diebus modo commemoratis obseruationibus insunt, indicio esse, quod motus Cometae isto tempore ab actione telluris affectus fuerit, nec nos plane habebit refragantes; hoc enim in negotio vix quicquam certi statuere licet, nisi experimento facto ipsa quantitas actionis, quam terra in Cometam exseruit, fuerit inuestigata.

§. 12. Deinde licet errores, pro obseruationibus secunda apparitione factis, numeris satis exiguis concludantur, tamen vtique singulare videbitur, quod pro Latitudinibus, tantum non omes hi dissensus in eundem sensum cadant, id est singuli fere sint positiui. Quatenus autem id praecipue intendimus, vt Latitudinibus diebus 15 et 29 Iunii obseruatis satisfaceremus, id vix aliter praestare nobis licuit, quam huiusmodi valore pro inclinatione orbitae adhibito, quo obseruationibus secundae apparitionis, respectu Latitudinis, errores non quidem praegrandes, verumtamen in eundem sensum cadentes inducerentur. Fieri quidem potest, vt leui quadam correctio-

ne

ne noſtris Elementis adplicata, errores obſeruationum ſecundae apparitionis reſpectu Latitudinis tantillum mutentur, cuius etiam ſpecimen infra dabimus, verum vt incommodo, ſupra commemorato, penitus obuiam iri queat, nullum adhuc nobis innotuit remedium. Caeterum facile liquet, obſeruationes, quas ſigno NB. diſtinximus, pro aliquantum erroneis eſſe habendas, id quod quoque exinde probabile redditur, quod Cel. *Meſſier* non licuerit harum obſeruationum verificationem per alias, iisdem diebus factas, inſtituere.

§. 13. Elementa noſtra licet obſeruationibus egregie ſatisfaciant, tamen non dubitamus, quin leui earum mutatione, conſenſus calculi cum obſeruationibus vel aeque aptus, vel maior obtineri queat, hoc enim in negotio aliquam Latitudinem pro definiendis Elementis Cometae eſſe admittendam, ipſa rei indoles declarat. Si itaque Elementa noſtra pro ipſa ſpecie orbitae, nimirum eius ſemiparameter et excentricitas, vti ſupra definita ſunt, retineantur, tum vero ſupponatur Tempus Perihelii Cometae contigiſſe Aug. 13,5500, fiet pro obſeruatione die 15 Iunii inſtituta Longitudo Cometae ex calculo $9^s. 2^\circ. 52'. 23''$ et pro 29 Iunii $11^h. 59'. 26''$ Longitudo erit $9^s. 9^\circ. 43'. 6''$: ita vt iam quidem obſeruatio die 15 Iunii aliquanto magis ſit erronea, quam ſecundum Elementa a nobis ſtabilita, qui tamen error facile admitti poſſet. Pro tempore autem 2 Aug. $15^h. 3'. 15''$ fiet nunc Longitudo Cometae $3^s. 6^\circ. 2'. 14''$, ex quo liquet poſteriori hac expreſſione pro tempore Perihelii adhibita, pro obſeruationibus ſecunda Cometae adparitione factis errores in Longitudinibus commiſſos aliquantulum imminui.

Pro Latitudinibus vero Cometae calculus sequentes praebet conclusiones: Primum si inclinatio orbitae statuatur 1°. 33'. 50", tumque Latitudini obseruatae die 29 Iunii, habita tamen ratione effectus ex Parallaxi oriundi, satisfiat, erit Longitudo ☊ = $4^s$. 12°. 3' et pro obseruatione 15 Iunii Latitudo ex calculo 6°. 58'. 50". B, pro 2 autem Aug. 49'. 56" Austr. Deinde si inclinatio orbitae ponatur 1°. 33'. 40", satisfaciendo iterum Latitudini die 29 Iunii obseruatae, fiet pro 15 Iunii Latitudo ex calculo 6°. 58'. 20' Bor. et pro 2 Aug. 49'. 51" Austr, Longitudine ☊ existente = $4^s$. 12°. 7'. Hinc igitur patet ista correctione temporis Periodici, Latitudinibus Cometae maiores induci errores; quam ob rem nisi scrupulosiores esse velimus circa errores obseruationum in Longitudinibus, Tempus Perihelii in nostris Elementis assignatum potius retrahi quam promoueri debet.

§. 14. Sequitur nunc, vt exactius examinemus an non, aucto aliquantillum tempore Periodico Cometae nostri, eiusmodi Elementa inuenire liceat, quibus obseruationes, quantum fieri potest, exacte impleantur. Incipiamus vero primum ab augmentis huius temporis Periodici exiguis, hincque supponamus esse tempus Periodicum 5, 6 Annorum. Tum vero calculo instituto reperire licebit, quod si reliqua Cometa Elementa hunc in modum determinentur:

Semiparameter orbitae = 1, 2044811
Distantia Perihelii = 0, 6743408
Excentricitas = 0, 7861608

Tem-

Tempus Perihelii Aug. 13,5400, Long. ☊ = 4ˢ. 12°. 9′ Elongatio Perihelii a nodo descend. = 44°. 7′. 59″ et inclinatio orbitae 1°. 33′. 40″; Longitudines et Latitudines Cometae pro quinque momentis obseruatis inuenientur ex calculo, vti sequens Tabella declarat:

| Temp. Med. Parisinum. | | | | Longit. Cometae ex calculo. | | | | Latit. Cometae ex calculo. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Iunii 15. | 11ʰ. | 23′. | 22″ | 9ˢ. | 2°. | 52′. | 12″ | 6°. | 58′. | 37″. | B |
| 29. | 11. | 59. | 6 | 9. | 9. | 42. | 59 | 38. | 0. | 54. | B |
| Aug. 2. | 15. | 3. | 15 | 3. | 6. | 2. | 7 | | 49. | 35. | A |
| 29. | 15. | 21. | 53 | 3. | 21. | 0. | 33 | 1. | 20. | 1. | A |
| Oct. 1. | 16. | 33. | 28 | 4. | 10. | 14. | 44 | 1. | 9. | 0. | A |

Harum autem determinationum comparatio cum Tabula nostra superius allata declarabit, an his Elementis adhibitis obseruationum errores augeantur, an minuantur. Liquet igitur pro obseruationibus secunda apparitione factis, errores obseruationum in Longitudine aliquantillum diminui; in Latitudine vero hi errores partim augentur, vti pro obseruationibus diebus 2 et 29 Augusti, partim minuentur, vti pro obseruatione die 1 Octob. instituta. At pro obseruatione die 15 Iunii facta error in Latitudine omnino multum excedit illum, qui secundum Elementa a nobis adoptata reperitur.

§. 15. Tribuamus nunc tempori Periodico Cometae nostri augmentum aliquanto maius, ponendo nimirum quod integrorum sex sit annorum. Tum autem si reliqua Cometae Elementa sequentem in modum determinentur:

Semiparameter orbitae $= 1,2071811$
Diſtantia Perihelii $= 0,6719267$
Excentricitas $= 0,7965047$

Longitudo ☊ $= 4^s. 12^\circ. 6'$, Elongatio Perihelii a ☋ $= 44^\circ. 9'. 56''$, inclinatio orbitae $= 1^\circ. 34'. 30''$, pro quinque obſeruationibus modo memoratis, calculus ſequentia praebebit Cometae loca Geocentrica:

| | | Longit. Cometae. | Latit. Cometae. |
|---|---|---|---|
| 15 Iunii | - | $9^s. 2^\circ. 51'. 52''$ | $6^\circ. 58'. 6''$ B |
| 29 Iunii | - | 9. 9. 43. 6 | 38. 0. 27. |
| 2 Aug. | - | 3. 6. 8. 18 | - - 50. 15 A |
| 29 - - | - | 3. 21. 5. 42 | 1. 20. 0. |
| 1 Oct. | - | 4. 10. 13. 18 | 1. 9. 10. |

vbi quidem reſpectu Latitudinis obſeruationibus ſecundae apparitionis melius ſatisfit, quam per vlla Elementa hucvsque commemorata. Longitudinum autem ſi habeatur ratio, obſeruationes quidem 2 Aug. et 1 Octob. inſtituta egregie adimplentur, at pro 29 Aug. error obſeruationis ſecundum haec Elementa excederet quinque minuta cum dimidio.

§. 16. Quia vero Elementa allata certo valori pro ſemiparametro aſſumto accommodata ſunt, nunc quoque videndum, an non ſemiparametrum hunc immutando, error Longitudinis pro 29 Aug. imminui queat. Retenta igitur eadem quantitate temporis Periodici, reliqua Cometae Elementa ſtatuantur: Semiparameter orbitae $= 1,2073967$; Excentricitas $= 0,7964519$; Longitudo ☊ $= 4^s. 12^\circ. 28'$; Elongatio Perihelii a ☋ $= 43^\circ. 47'. 28''$,

Incli-

Inclinatio orbitae = 1°. 34′. 0″, hincque erunt loca Cometae, ex calculo:

| | Longit. Cometae. | | | | Latit. Com. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d. 15 Iunii - | 9ˢ. | 2°. | 51′. | 25″ | 6°. | 58′. | 6″ | B |
| 29 - - - | 9. | 9. | 42. | 42 | 38. | 0. | 24 | |
| 2 Aug. - | 3. | 6. | 2. | 47 | - | 49. | 3 | A |
| 29 - - - | 3. | 21. | 4. | 56 | 1. | 19. | 36. | |
| 1 Octob. - | 4. | 10. | 12. | 23 | 1. | 9. | 1. | |

Sic itaque id quidem obtinetur, vt error in Longitudine pro obseruatione, die 29 Augusti instituta, aliquantum deprimatur, verum praeterquam quod errores in Latitudine, tam pro hac obseruatione, quam illa, quae 2 Aug. facta est, augeantur, obseruatio 1 Octob. iam respectu Longitudinis magis fit erronea, quam secundum Elementa prius commemorata. Quo autem magis valor pro semiparametro minuitur, eo maiores errores obseruationi 1 Octob. factae inducentur, ita vt hinc tuto colligere licet, si tempus Periodicum statuatur sex annorum, pro obseruationibus secundae apparitionis respectu Longitudinis summam maximorum errorum positiui et negatiui quinque saltem minutis primis aequari.

§. 17. Vlterius autem procedendo nunc examinabimus, quibus erroribus obseruationes fiant obnoxiae, si tempus Periodicum statuatur septem annorum. Heic igitur si pro semiparametro adhibeatur valor = 1, 2125511, vt obseruationibus diebus 15 & 29 Iunii institutis satisfiat, reliqua Elementa sequenti ratione definientur: Excentricitas = 0, 8177036; Longitudo ☊ = 4ˢ. 12°. 49′; Elongatio Perihelii a ☋ = 43°. 26′. 10″; Inclinatio orbitae

= 1°.

= 1°. 35′. 30″. Hinc vero loca Cometae, pro quinque momentis ſupra commemoratis, fient:

| | Longit. Comet. | | | | Latit. Com. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d. 15 Iunii - . | 9ˢ. | 2°. | 52′. | 1″ | 6°. | 58′. | 16″ | B |
| 29 - - | 9. | 9. | 42. | 50 | 38. | 0. | 26. | |
| 2 Aug. - | 3. | 6. | 6. | 19 | | 49. | 3 | A |
| 29 - - | 3. | 21. | 16. | 18 | 1. | 19. | 31. | |
| 1 Octob. | 4. | 10. | 10. | 46 | 1. | 9. | 17. | |

Conſtat itaque ex hac Tabella, errores obſeruationum ſecunda Cometae apparitione factarum reſpectu Longitudinis praegrandes eſſe, et imprimis quidem illam, quae obſeruationi die 29 Aug. ineſt, adeo ſedecim minuta prima excedere, cuiusmodi errem vix quispiam hac in obſeruatione ſuſpicari poterit.

§. 18. Quod ſi vero, valorem ſemiparametri aliquantum augendo, id intendamus, vt errorem in obſervatione d. 29 Aug. deprimamus, ex altera parte plurima alia incommoda experiemur; tum enim non ſolum error in obſeruatione die 1 Octob. inſtituta, reſpectu longitudinis commiſſus, in maiori ratione augebitur, ac illa pro 29 Aug. minuitur; ſed etiam ſingulis Latitudinibus Cometae, ſecunda eius apparitione obſeruatis, inſignes inducentur errores. Statuatur enim Semiparameter orbitae = 1,2133888; Excentricitas = 0,8175636; Longitudo ☊ = 4ˢ. 13°. 58′; Elongatio Perihelii a ☋ = 42°. 14′. 41″; Inclinatio orbitae 1°. 33′. 50″, eruntque loca Cometae ſubſidio horum Elementorum determinata

Lon-

| | Longit. Comet. | | | | Latit. Comet. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 Iunii - | 9ˢ. | 2°. | 51′. | 54″ | 6°. | 58′. | 30″ | B |
| 29 - - - | 9. | 9. | 42. | 38 | 38. | 0. | 30. | |
| 2 Aug. - | 3. | 6. | 5. | 59 | | 45. | 25 | A |
| 29 - - - | 3. | 21. | 13. | 54 | 1. | 17. | 57. | |
| 1 Octob. - | 4. | 10. | 7. | 26 | 1. | 9. | 13. | |

§. 19. Ratiocinio igitur iam exposito euidenter comprobatur, si Tempus periodicum Cometae, vltra eum valorem, quem in nostris calculis adoptauimus, augeatur, obseruationibus errores continuo maiores induci, et siquidem illi errores, qui pro hypothesi temporis Periodici sex annorum locum habent, verisimilitudine non prorsus destitui reputentur, saltem certum est, valore temporis Periodici vsque ad septem annos aucto, obseruationes maioribus obnoxias reddi erroribus, quam vt vllo modo fidem inuenire queant. Verum quum huius ratiocinii vis praecipue in eo resideat, quod omnes omnino obseruationes circa hunc Cometam institutae ad consensum inter se redigendae sint, si cui verisimile videatur, actionem telluris in Cometam adeo fuisse insignem, vt motum Cometae sensibili perturbatione afficere potuerit; etiam adhuc examinandum restat, quam Latitudinem tribuere liceat Elementis, quae obseruationibus secunda tantum Cometae apparitione factis satisfacere debent. Quandoquidem autem angulus anomaliae, a Cometa circa Solem descriptus a 2 Augusti vsque ad initium Octobris, multo sit minor illo, quem in prioribus nostris calculis considerauimus, facile intelligitur, dum quaestio est de Elementis, quibus obseruationes secundae apparitionis implentur, illa non adeo arctis limiti-

bus circumscribi, ac quae omnibus in vniuersum obseruationibus satisfacere debent.

§. 20. Praeterea quum Latitudines Cometae secunda eius apparitione obseruatae valde sint exiguae, nullum omnino est dubium, quin facili negotio illis satisfiat, modo obseruationibus, circa Longitudines institutis, fuerit satisfactum; hinc in sequenti disquisitione nihil necesse erat, vt Latitudinis haberemus respectum, quo ipso ingens compendium nostro examini accessit. Scilicet quia iam Longitudinem Nodi pro cognita habere liceat, si pro tempore Periodico Cometae et semiparametro orbitae certi valores hypothesi effingantur, in eo tantum elaborandum est, vt inueniatur Tempus Perihelii Cometae et Elongatio Perihelii a Nodo, pro orbita, quae binis datis obseruationibus satisfaciat. Vt autem euidentius pateat, qua ratione hoc examen instruximus, exemplo quodam eius ideam declarabimus. Supponamus igitur esse Longitudinem ☊ = $4^s. 12^\circ. 0'$; Tempus Periodium Cometae = 7 Annis; Semiparametrum orbitae = 1, 2302688, et quaeramus orbitam, quae binis obseruationibus: die 2 Aug. $15^h. 3'. 15''$ et die 1 Octob. $15^h. 23'. 22''$ satisfaciat. Nunc vero oppido liquet, si pro alterutra harum obseruationum constaret angulus anomaliae a Perihelio descriptus, eo ipso non solum ipsum tempus Perihelii sed etiam elongationem Perihelii a Nodo determinari. Faciendo igitur pro illa obseruatione aliquot hypotheses anomaliae, et quaerendo Tempora Perihelii et elongationes Perihelii a Nodo istis hypothesibus conformes, deinde inuestigentur loca Cometae Geocentrica ex elementis inuentis, pro altera obseruatione, tumque dissensus harum determinatio-

num

num cum obseruatione declarabit, quos valores pro Tempore Perihelii et elongatione Perihelii a Nodo assignare necesse erit.

§. 21. Sic si pro obseruatione 1 Octob. statuantur hae hypotheses anomaliae: 80°. 40′. et 81°. 0′, inde habebuntur pro Tempore Perihelii hi valores: August 14, 5976 et 14, 2359. Deinde, calculo instituto, quaerantur distantiae Cometae a Sole his hypothesibus accommodatae, et quum inclinatio orbitae saltem proxime sit cognita, etiam distantiae curtatae dabuntur. Vnde si consideretur triangulum, quod formatur a loco Cometae ad Eclipticam reducto, centro telluris et Solis; in isto triangulo bina cognita sunt latera, distantia nimirum Cometae curtata et distantia Solis a terra, una cum elongatione Solis a Cometa, quae per ipsam obseruationem datur. Innotescet igitur hinc elongatio Cometae a terra e Sole visa, quae pro priori quidem harum hypothesium est 69°. 23′. 31″. Porro datur elongatio Nodi a terra, propter datas longitudines Nodi et terrae, haec elongatio pro casu praesenti est 56°. 56′. 30″; erit igitur elongatio Cometae a Nodo 126°. 19′. 1″, qui angulus ad orbitam Cometae reductus erit 126°. 18′. 25″, vnde subtrahendo angulum Anomaliae suppositum 80°. 40′. 0″, fiet elongatio Perihelii a Nodo = 45°. 38′. 25″; pro altera vero hypothesi inuenitur haec elongatio 45°. 37′. 28″. Deinde pro binis his hypothesibus computetur locus Cometae ad momentum die 2 Aug. notatum, eruntque eius valores 3ˢ. 5°. 47′. 16″ et 3ˢ. 5°. 16′. 38″, ex quo per regulam falsi concluditur, Tempus Perihelii statui debere Aug. 14, 7772 et elongationem Perihelii a Nodo 45°. 39′. 0″,

quod etiam ſatis bene cum obſeruatione die 2 Aug. facta congruit: nam ex vltimis his Elementis habetur locus Cometae die 2 Aug. et momento citato 3ˢ. 6°. 2′. 56″.

§. 22. Nunc igitur, ad principales concluſiones, ex noſtris calculis eliciendas, propius accedentes, primum obſeruabimus, ſuppoſito tempore Periodico ſex annorum, obſeruationibus ſecundae apparitionis ſatis exacte ſatisfieri. Nam ſi ſtatuatur ſemiparameter orbitae = 1, 2143963; Excentricitas = 0, 7951200; Tempus Perihelii Aug. 14, 1023; Elongatio Perihelii a ☋ = 44°. 50′. 46″. Longitudine ☊ ſuppoſita = 4ˢ. 12°. 0′, loca Cometae ex calculo deducta erunt:

| | Long. Cometae | Differ. ab obſerv. |
|---|---|---|
| 2 Aug. 15ʰ. 3′. 15″ | 3ˢ. 6°. 2′. 53″ | — 21″ |
| 12 - - 14. 46. 25 | 3. 10. 36. 52 | — 2′. 4 |
| 29 - - 15. 21. 53 | 3. 21. 0. 12 | — 9 |
| 1 Oct. 15. 23. 22 | 4. 10. 12. 15 | — 9 |

vbi vix quidem maior conſenſus Theoriae cum calculo deſiderari poteſt. Caeterum obſeruari quoque meretur, ſi his Elementis adhibitis, inſuper ſtatuatur inclinatio orbitae 1°. 34′. 30″, Latitudinibus Cometae obſeruatis admodum egregie ſatisfactum iri.

§. 23. Sequitur autem, vt iam quoque inquiramus, an, ſuppoſito tempore Periodico Cometae ſeptem annorum, obſeruationes ſecunda apparitione factae impleri queant. Hoc vero examen ita inſtituemus, vt reſpectu imprimis habito quatuor momentorum obſeruatorum, de

quibus

quibus in superiori § egimus; dispiciamus, quales errores cuipiam harum obseruationum inesse oportet, dum tribus reliquis fuerit satisfactum. Iam igitur in id intenti, vt obseruationibus diebus 2 Aug. 29 Aug. et 1 Octob. satisfaciamus, sequentia adipiscimur Elementa: Semiparametrum orbitae = 1, 2373712; Excentricitatem = 0,8135456; Tempus Perihelii Aug. 15,6280; Elongationem Perihelii a ☊ = 46°. 14'. 6", posita Longitudine ☊ — 4$^s$. 12°. 0', quibus in vsum vocatis erunt:

| | Longit. Cometae. | Differ. ab obseru. |
|---|---|---|
| 2 Aug. | 3$^s$. 6°. 2'. 27" | + 5" |
| 12 - | 3. 10. 41. 45 | — 6'. 55 |
| 29 - | 3. 21. 0. 20 | — 17 |
| 1 Octob. | 4. 10. 12. 29 | — 23 |

Facile autem colligi potest, hunc errorem in obseruatione, die 12 Augusti facta, commissum, minimum esse, qui prodit, dum obseruationibus 2 Aug. et 1 Octob. satisfaciendum est.

§. 24. Nam si pro Elementis orbitae sequentes binae effingantur hypotheses:

| | I. Hyp. | II. Hyp. |
|---|---|---|
| Semiparameter orbitae | 1, 2125511 | 1, 2473836 |
| Tempus Perihelii Aug. | 12, 8000 | 16, 8328 |
| Elongatio Perihelii a ☊ | 44°. 20'. 2" | 47°. 1'. 0" |

Longitudine Nodi semper supposita = 4$^s$. 12°. 0', obseruationibus dier. 2 Aug. et 1 Octob. quidem satisfiet; at pro momento die 12. Aug. obseruato ex his Elementis sequentes deducentur Longitudines Cometae:

| | I. Hyp. | II. Hyp. |
|---|---|---|
| Longit. Cometae die 12. Aug. | $3^s. 10^o. 43'. 25''$ | $3^s. 10^o. 42'. 54''$ |

ex quo omnino patescit, determinationem in § praecedenti inuentam ab obseruatione fere tam parum recedere, ac fieri potest, quatenus obseruationibus diebus 2 Aug. et 1 Octob. omnimode satisfaciendum est; id quod aliis quoque calculis comprobari posset, nisi breuitati consulendum esset. Sufficiet autem quod hoc specimine iam sit comprobatum, supposito Tempore Periodico Cometae septem annorum, non fieri posse, vt Elementa inueniantur quae obseruationes, diebus 2 Aug. 12 Aug. et 1 Octob. institutas, simul ab omnibus plane erroribus immunes reddat.

§. 25. Deinde vero pro conciliandis inter se obseruationibus die 12 Aug. 29 Aug. et 1 Octob. institutis, sequentia pro orbita Cometae inuenientur Elementa: Semiparameter orbitae 1, 2345253; tempus transitus per Perihelium Aug. 15, 1340 et elongatio Perihelii a Nodo descendente $45^o. 59'. 24''$, et tum quidem Longitudines Cometae his Elementis conformes, pro momentis saepius commemoratis, sequentes habebuntur:

| | Long. Com. | | | | Differ. |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 Aug. | $3^s.$ | $5^o.$ | $49'.$ | $1''$ | $+ 13'. 31''$ |
| 12 - | 3 | 10. | 34. | 31 | + 17 |
| 29 - | 3 | 21. | 0. | 20 | − 17 |
| 1 Octob. | 4 | 10. | 12. | 6 | + 0. |

Experimento autem instituto reperitur, hunc errorem pro obseruatione, die 2 Aug. facta, minimum fere esse, qui prodit, quatenus obseruationum, diebus 12 Aug. et 10 Octob. institutarum, intenditur consensus.

§. 26.

§. 26. Iam itaque vltimo loco disquirendum est, quid fiat de obseruatione 1 Octob. instituta, adhibitis Elementis, quibus tres obseruationes, diebus 2, 12 et 29 Augusti factae, implentur? Ista autem Elementa sequentem in modum determinantur: Semiparameter orbitae = 1,2125511; Tempus Perihelii Aug. 12, 1500; Elongatio Perihelii a ☊ = 43°. 16'. 33", et Longitudines Cometae, ex his elementis, pro momentis obseruationum adnotatis, deducendae, erunt:

| Longit. Cometae. | | Differ. ab obseru. |
|---|---|---|
| 2 Aug. | 3ˢ. 6°. 2'. 33" | − 1" |
| 12 - | 3. 10. 34. 34 | + 14 |
| 29 - | 3. 21. 0. 11 | − 8 |
| 1 Octob. | 4. 9. 37. 14 | + 34'. 52 |

vbi quidem error, qui pro obseruatione die 1 Octob. facta, resultat, enormis plane est. Caeterum heic obseruari meretur, quod si obseruationibus 2 et 12 Aug. satisfaciendum sit, eiusmodi quidem Elementa inueniri posse, quae minorem pro obseruatione diei 1 Octob. inuoluant errorem, interim tamen simul obseruationem die 29 Aug. institutam, valde sensibilibus obnoxiam reddi erroribus. Sic si semiparameter orbitae statuatur = 1, 2302688; Tempus Perihelii Aug. 14, 2900; Elongatio a ☊ = 44°. 55'. 21", erit Longitudo Cometae pro 1 Octob. 4ˢ. 9°. 48'. 4" et pro 29 Aug. 3ˢ. 20°. 52'. 54", vbi nunc quidem Longitudo die 29 Aug. obseruata, errori septem minutorum redditur obnoxia.

§. 27. Hoc igitur ratiocinio, vti speramus, exacte demonstratum est, posito, quod Tempus Periodicum Come-

me-

metae ad septem vsque annos assurgat, fieri nequaquam posse, vt omnes obseruationes secunda Cometae apparitione institutae, cum veritate consentiant, et inter illas saltem nonnullas occurrere, quae septem minutis primis a vero aberrant, quod scilicet fiet cum obseruatione die 12 Aug. facta, dum Elementa quaeruntur, quae obseruationibus dierum 2 Aug. 29 Aug. et 1 Octob. penitus quadrant. Ex ipsa vero rei indole, facile colligitur, quod si quatuor istae obseruationes, quas hic contemplati sumus, ad consensum inter se redigi non potuerint, et quidem, si eueniat, vt prima, tertia et quarta cum Elementis conciliantur, in secunda autem quispiam reperiatur error, tum multo maiores prodituros fore errores, si vel obseruationes prima, secunda et tertia cum Elementis consentiant, quarta discrepante, vel consensus obseruationum secundae, tertiae et quartae cum Elementis obtineatur, obseruatione prima discrepante; nam consensum obseruationum primae, secundae et quartae cum iisdem Elementis ne in potestate quidem esse, iam supra ostendimus.

§. 28. Si igitur hanc disquisitionem vlterius prosequi velimus, sufficit vt, pro maiori adhuc Temporis Periodici incremento, quaeramus Elementa, quae cum obseruationibus prima, tertia et quarta consentiant, tumque inuestigemus, quantus dissensus inter haec Elementa et obseruationem secundam reperiatur. Hinc si ponamus tempus Periodicum 8 Annorum, pro Elementis orbitae has consequemur determinationes: Semiparameter orbitae = 1, 2589255; Tempus Perihelii Aug. 17, 2300; Elongatio Perihelii a Nodo desc. = 47°. 32'. 4'', existente Longitudine Nodi Asc. vt in superioribus = 4ˢ. 12°. 0'. Ex his

his vero Elementis Longitudines Cometae ita erunt determinatae:

| Longit. Cometae. | | Different. ab obseruat. |
|---|---|---|
| 2 Aug. | 3ˢ. 6°. 2′. 44″ | — 12″ |
| 12 - | 3. 10. 47. 42 | — 12′. 56 |
| 29 - | 3. 21. 0. 43 | — 40 |
| 1 Octob. | 4. 10. 12. 6 | + 0 |

ita vt nunc quidem perspicuum fiat, aucto tempore Periodico errores obseruationum secundae apparitionis continuo magis magisque increscere. Quam ob rem, etiamsi adhibito tempore Periodico sex annorum, Elementa orbitae facile detegantur, quae cum vniuersis his obseruationibus consentiunt, tamen dubitare licet, an tempus Periodium 6 annorum cum dimidio, ita admitti queat, vt modo dictis obseruationibus verisimiles inducantur errores.

§. 29. Denique pro confirmando valore temporis Periodici a nobis inuento, sequens adhiberi potest argumentum. Vtcunque motus Cometae per actionem telluris fuerit perturbatus, tamen pro certo statuere licebit, hinc ipsum Cometae per Perihelium transitum vix vnico die fuisse immutatum, nec in ipsa Cometae distantia Perihelii praegrandes mutationes inde oriri potuerunt; ex quo concluditur, assumto certo valore temporis Periodici, obseruationes ante et post Cometae proximum ad tellurem accessum, saltem eo vsque consentire debere, vt tempora praebeant pro transitu per Perihelium, quae vix vno vel altero die inter se discrepent. Iam vero ex calculis Cel. *Pingré*, pro orbita Parabolica, obseruationibus mense Iunii institutis, satisfaciente, perspicuum fiet, quo magis augeatur tempus

Periodicum Cometae, eo citius tempus transitus per Perihelium incidere, eo autem minorem euadere valorem pro semiparametro orbitae, quatenus nimirum ratio habeatur harum obseruationum mense Iunii institutarum. Nam ex calculis Cel. *Pingré* habetur tempus transitus per Perihelium Aug. d. 9. $0^{h}.\ 19^{\prime}.\ 17^{\prime\prime}$ et semiparameter orbitae $= 1,25918$, quarum determinationum prior eam, quam pro tempore Periodico 5 Annorum cum dimidio inuenimus, quatuor diebus anteuertit. Contra autem ex calculis nostris, in superioribus allatis, perspicitur, vt obseruationibus secundae apparitionis satisfiat, aucto tempore Periodico Cometae, ipsum tempus Perihelii prorogari, ita vt pro Periodo Cometae 8 annorum iam in 17 diem Augusti incidere debuisset, tum vero pro hac hypothesi erit semiparameter orbitae 1, 25892, ideoque parum diuersus ab illo, quem pro orbita Parabolica inuenit Cel. *Pingré*.

§. 30 Sicque iam ad finem perduximus demonstrationem nostram, qua ostendere conati sumus, omnes valores, pro tempore Periodico Cometae Anno 1770 obseruati, eo magis fieri erroneos, quo longius abludunt ab isto valore, quem in nostris Elementis adoptauimus, idque siue ratio habeatur omnium in vniuersum obseruationum, seu tantummodo earum, quae secunda Cometae apparitione factae habentur. Facile autem nobis persuademus, vt vnusquisque, qui huius argumenti rigorosum quantumlibet examen inire voluerit, reperiet, omnes rationes adeo exacte a nobis esse subductas, vt contra huius ratiocinii vim vix quicquam aliud excipi queat, quam quod statuatur, obseruationibus praegrandes inesse errores. Verum si seriem harum obseruationum vsque ad 2 diem Octobris, a Cel. *Messier* singulari studio et industria continuatam, examine-

mus,

mus, tantum earum reperimus tam inter se quam cum Theoria consensum, vt plane pro re quam maxime incredibili haberi mereatur, plerasque harum obseruationum ingentibus obnoxias esse erroribus. Interim tamen si, contra omnem nostram spem, obseruationes fuerint erroneae, tum omnes quidem nostri calculi incassum erunt instituti, verum eo tamen magis venia nostri errori tunc dabitur, quod id vnice nostra disquisitione intendimus, vt ostenderemus, quid ex obseruationibus circa hunc Cometam institutis sequatur. Caeterum licet operae pretium non reputauimus, vt inquireremus, quanta diminutio pro tempore Periodico Cometae nostri, locum habere queat, quia vix quisquam in eam inclinabit opinionem, hoc tempus potius esse minuendum, quam augendum, tamen facili coniectura ex calculis nostris colligi potest, hanc diminutionem si semissem anni excedat, vix aliqua verisimilitudine gaudere.

§. 31. In priori de hoc argumento disquisitione examinauimus, quam prope Cometa hic noster accedere queat ad orbitas illorum Planetarum, quas in motu suo traiicit, et quamuis hae determinationes ob mutata Cometae Elementa, aliquatenus immutentur, tamen operae pretium non erit, vt hos calculos denuo exsequeremur, nisi pro orbita Iouis, quippe quum per propiorem Cometae ad Iouem accessum vtique fieri potuit, vt eius motus plane fuerit immutatus. Si igitur ex puncto N, vbi orbitae Cometae IN et Iouis CN se intersecant, intelligatur ad Eclipticam demissus arcus normalis NL; pro ineunte anno 1778 erit Longitudo puncti $I = 3^s. 8^\circ. 44'. 0''$ et puncti $C = 4^s. 12^\circ. 0'. 0''$, hinc arcus $IC = 33^\circ. 16'. 0''$, tumque ob angulum $NIL = 1^\circ. 19'. 10''$; et angulum $NCL$

Tab. XIII. Fig 3.



$= 1^\circ.$

$= 1^\circ. 33'. 40''$, fiet I L $= 90^\circ. 54'. 44''$; C L $= 57^\circ. 38'. 44''$, hinc I N $= 90^\circ. 54'. 43''$; C N $= 57^\circ. 39'. 19''$, et angulus I N C $= 51'. 17''$. Tum vero ob Longitudinem puncti N $= 6^s. 9^\circ. 38'. 44''$, et Longitudinem Aphelii ♃ $= 6^s. 10^\circ. 51'. 27''$, fiet differentia harum Longitudinum $= 1^\circ. 12'. 43''$; et si locus Aphelii Iouis fuerit $\alpha$, fiet I $\alpha = 92^\circ. 7'. 27''$, hincque N $\alpha = 1^\circ. 12'. 42''$. Porro si locus Aphelii Cometae super arcu C N sit A, fiet C A $= 44^\circ. 17'. 4''$ et N A $= 13^\circ. 22'. 15''$; hinc si locus Aphelii Cometae, ad orbitam Iouis reductus, sit $a$, fiet N $a = 13^\circ. 22'. 10''$, hinc $a\alpha = 14^\circ. 34'. 52''$.

§. 32. Nunc igitur quum constet, pro binis orbitis, minimo angulo ad se inclinatis, proximam distantiam reperiri, vbi radii vectores ad Solem ducti inter se fiunt aequales, si pro Cometa binae constituantur hypotheses anomaliae ab Aphelio computatae $7^\circ. 26'$. et $7^\circ. 28'$, habebuntur Logarithmi pro distantiis a Sole 0, 7366557; 0, 7365387, at pro anomalia Iouis $7^\circ. 8'$ est Logarithmus distantiae Iouis a Sole $=$ 0, 736539; vnde colligitur, distantias Iouis et Cometae a Sole proxime coincidere, existente anomalia Cometae a suo Aphelio $= 7^\circ. 27'. 59''$, hincque anomalia Iouis a suo Aphelio $7^\circ. 6'. 56''$; hinc quum Longitudo Aphelii Iouis sit $6^s. 10^\circ. 51'. 27''$, erit Longitudo puncti in orbita Iouis ad quam proxime accedere potest $= 6^s. 3^\circ. 44'. 31''$. Pro hoc autem puncto habetur distantia Iouis a Cometa $=$ 0, 00836 ideoque 119ma pars distantiae mediae telluris a Sole. Quum itaque sit massa Iouis ad illam Solis, in ratione 340 : 365, 412, hinc concluditur, in proxima Iouis ad Cometam distantia vim Iouis actionem a Sole oriundam fere 396 vicibus fore supe-

superaturam. Porro si statuatur anomalia Cometae ab Aphelio A versus C computata 7°. 48'. 48'', fiet Logarithmus distantiae Cometae = 0, 735298, tumque, reducto loco Cometae ad orbitam Iouis, fiet anomalia ab Aphelio Iouis = 22°. 23'. 37'' et Longitudo huius puncti in orbita Iouis 5^s. 18°. 27'. 42'', pro qua etiam est Logarithmus distantiae = 0, 735298. Ex his autem fiet distantia Cometae a Ione = 0, 0293, siue vix 34^ta parte distantiae mediae Solis a tellure maior, et pro hoc loco actio Iouis illam Solis 32 vicibus exsuperabit.

§. 33. Praestabit autem vt nunc accuratius expendamus, quam prope Iupiter, dum in coniunctione cum Cometa Anno 1767 erat, ad eum accessit, seu etiam in quanta vicinia Cometae versabitur in proxima eius cum hoc Astro coniunctione Anno 1779. Quia igitur ipsum Aphelium Cometae contigit Anno 1767 die 28 Octobris h. 8 circiter, existente Longitudine Aphelii 5^s. 26°. 16'. 26'', hinc conficitur, die 27 Maii eiusdem anni fuisse Longitudinem Cometae = 5^s. 20°. 57', quae eadem quoque pro hoc die est Longitudo Iouis, vnde coniunctionem horum Astrorum isto die contigisse, necesse est. At pro eodem tempore quum sit Longitudo intersectionis orbitarum = 6^s. 9°. 28'. et inclinatio earum inter se 51'. 38'', propter distantiam Cometae a Sole = 5, 5340, et distantiam Iouis a Sole = 5, 4423, fiet distantia Iouis a Cometa = 0,09531 circiter, ex quo sequitur, actionem Iouis in Cometam Solis vi attractrice tribus vicibus fuisse maiorem, vnde ob motum Cometae, prope Aphelium admodum lentum, haec actio Iouis in motum Cometae effectum sensibilem habuisse, verisimilitudine haud destituitur.

§. 34. In proxima Cometae cum Ioue coniunctione, quae Anno 1779 continget, sequentia habentur obseruanda: Quoniam tempus Aphelii incidit Anno 1778 die 29 Decembris hora 10 circiter, coniunctio Iouis cum Cometa locum habebit Anno 1779 die 23 Augusti versus horam 12, existente vtriusque Astri Longitudine $6^s. 3^\circ. 34'. 26''$, et quum pro isto tempore sit Longitudo intersectionis orbitarum $6^s. 9^\circ. 39'$ et inclinatio $51'. 17''$, distantia Iouis a Sole existente $= 5,4520$, distantia autem Cometae $= 5,4590$, habebitur distantia Iouis a Cometa $= 0,0111$, ideoque actio Iouis tunc temporis, actionem Solis 225 vicibus exsuperabit, quo ipso non potest non fieri, vt orbita Cometae totalem subeat mutationem. Caeterum facile intelligitur, has determinationes pro omnimode exactis non esse reputandas, nisi quatenus Elementa nostra summo rigore fuerint definita, et quidem ex comparatione harum conclusionum cum illis, quas in priori Dissertatione attulimus, perspicitur, si tempus Periodicum Cometae aliquantum imminuatur, tum ea de caussa coniunctio Iouis cum Cometa aliquanto citius contingeret, quam secundum Elementa iam adoptata, ideoque et propius ad Longitudinem Cometae $5^s. 18^\circ. 28'$, vbi vnus proximorum accessuum Cometae ad orbitam Iouis situs est; simul vero coniunctio Anno 1779 aliquanto tardius continget, Longitudo igitur Cometae magis ac pro casu praecedente diverget a $6^s. 3^\circ. 44'$, quae locum habet pro accessu Cometae proximo ad orbitam Iouis, vnde actio Iouis in Cometam hac de ratione imminuetur. Siquidem autem in tempore Periodico Cometae definiendo; vtique aliqua Latitudo admittenda est, facile concedimus calculis nostris

modo

modo allatis id non esse tribuendum, vt ipsis demonstretur, quam praecise actionem Iupiter in sua coniunctione cum Cometa, siue Anno 1767, seu 1779 in hoc Astrum exercuerit, sed vt hinc verisimile reddatur, vtique fieri potuisse, vt ob vim perturbatricem Iouis orbita Cometae plane fuerit immutata, ita vt ipse Cometa antehac motum suum in orbita à praesenti plane diuersa descripserit, itaque hanc ob rationem Cometam nunquam antea, saltem in ista orbita, cuius iam dedimus Elementa, fuisse obseruatum.

§. 35. Ope Elementorum nostrorum pro motu Cometae stabilitorum, deducitur, distantia Cometae a tellure, pro isto momento, quo Anno 1770 die 1 Iulii hoc Astrum in proxima telluris vicinia versabatur = 0, 014953, seu aequalis fere $70^{mae}$ parti distantiae mediae Solis a tellure, quae etiam distantia minima fere est, ad quam hoc Astrum orbitae telluris adpropinquare poterit; vnde quum nullum sit indicium, actionem huius Cometae in nostrum globum terraqueum fuisse sensibilem, nec in posterum ab hoc Astro vllum periculum telluri imminebit; ex quo etiam tanto maior est ratio, vt animum omni metu ex appropinquatione Cometarum oriundo liberemus, quod inter omnes Cometas obseruatos, hic praecise sit, qui proxime ad tellurem accessit. Contra vero vix cum certitudine quicquam statuere licet de actione telluris in Cometam, quippe cuius rei examen calculis hunc in finem institutis, perficere nobis non licuit. Si autem aliqua fuerit actio telluris in Cometam, illa non potuit non valde exigua esse, quum adeo nobis successerit, obseruationes post proxi-

proximum Cometae ad tellurem accessum factas cum illis, quae ante hanc adproximationem institutae sunt, ad consensum redigere. Et si fides habenda sit argumentis haud contemnendis, quibus Cel. *Du Séjour* in erudito suo de Cometis opere (*Essai sur les Comètes*) Sectionis 7 Articulo 1. ostendere annititur, Sphaeram actiuitatis telluris nostrae vltra 125 semidiametros telluris protendi non debere; pro casu praesenti actionem telluris pro insensibili habere necesse est, quippe quum proxima Cometae a tellure distantia 357 semidiametris telluris aequetur.

---

---

# SVPPLEMENTVM AD DISSERTATIONES NOVIS COMMENTARIIS INSERTAS, DE ECLIPSIBVS SOLARIBVS ANNIS 1769 et 1773 OBSERVATIS, VT ET OCCVLTATIONIBVS FIXARVM A LVNA.

Auctore

*A. I. LEXELL.*

§. 1.

Ex eo tempore, quo commemoratas Eclipses Solares et fixarum a Luna occultationes computo subieci, plurimae postmodum ad meam notitiam peruenerunt obseruationes eorundem phaenomenorum, quas etiam calculo subiicere eo magis e re esse existimaui, quod per nonnullas earundem calculi mei prius instituti vel confirmari, vel emendari possent; tumque egregius earundem adhiberi posset vsus, ad determinandas Longitudines locorum, in quibus institutae fuerunt. Conclusiones autem ex his calculis deductas, hac occasione dum succinctae exponere constitui, rem Astronomis non prorsus ingratam me praestiturum esse confido.

## De Eclipsi Solis Anno 1769 obseruata,
conferatur Tom. XV. Nouor. Comment. pag. 588. et seqq.

§. 2. Antequam expressiones pro tempore coniunctionis ex obseruationibus deductas heic exposuero, primum principalia Elementa calculi pro singulis obseruationibus adferre animus est, vt scilicet eo facilius sit iudicium, vtrum mei calculi rite sibi constant, nec ne. Quamuis enim eadem mihi ac plurimis aliis Astronomis, libertas concessa esse posset, vt vltimas conclusiones ex calculis erutas tantum exponerem; tamen quum multiplici experientia edoctus sim, hisce in calculis saepe ab exercitatissimo etiam calculatore errores committi posse, operae pretium esse duxi, Elementa calculi fideliter exponere, quo facilius mearum conclusionum sit examen.

| §. 3. Phaenom. obser. | Paral. Long. | Lat. ☽ appar. | Semid. ☽ apparens. | Diff. Long. ⊙ et ☽ app. |
|---|---|---|---|---|
| Gryphiswald Initium | 27'. 13'', 2 | 18'. 14'', 6 | 16'. 54'', 3 | 27'. 7'', 5 |
| - - - - - Finis | 17. 52, 1 | 18. 22, 0 | 16. 57, 9 | 27. 6, 3 |
| Tolosatii - Initium | 39. 0, 7 | 21. 22, 8 | 16. 51, 3 | 24. 39, 7 |
| - - - - - Finis | 33. 59, 4 | 23. 11, 9 | 16. 55, 7 | 23. 3, 1 |
| Burdegalae - Initium | 38. 9, 3 | 19. 55, 8 | 16. 50, 9 | 25. 50, 3 |
| - - - - - Finis | 29. 46, 6 | 25. 49, 0 | 16. 56, 9 | 20. 7, 3 |
| Austorpi - Initium | 30. 11, 8 | 14. 30, 4 | 16. 53, 9 | 29. 14, 9 |
| - - - - - Finis | 25. 8, 0 | 15. 8, 1 | 16 55, 3 | 28. 59, 5 |
| Brestiae - - Finis | 31. 10, 4 | 18. 3, 1 | 16 54, 4 | 27. 15, 6 |
| Gadeti - - Initium | 44. 50, 4 | 23. 39, 3 | 16. 48, 7 | 23. 4, 8 |
| - - - - - Finis | 43. 2, 2 | 25. 47, 6 | 16. 54, 7 | 20. 1, 2 |
| Promont. Initium | 8. 1, 5 | 10. 37, 7 | 16. 54, 6 | 30. 55, 1 |
| Cap Nord - Finis | 5, 0 | 6. 41, 6 | 16. 55, 6 | 31. 56, 1 |
| Hammerfost - Finis | 1. 7, 0 | 6, 54, 1 | 16. 55, 7 | 32. 42, 7 |

Phae-

| Phaenom. obſeru. | Paral. Long. | Lat. ☽ appar. | Semid. ☽ apparens. | Diff. Long ⊙ & ☾ app. |
|---|---|---|---|---|
| Caroli coronae Finis | 14′. 48″, 9 | 17′. 0″, 7 | 16′. 57″, 3 | 27′. 58″, 6 |
| - - - - - Finis | 24. 37, 0 | 17. 25, 7 | 16. 54, 8 | 27. 39, 9 |
| Eſt Dereham Initium | 31. 1, 9 | 15. 44, 1 | 16. 51, 8 | 28. 36, 3 |
| - - - - - Finis | 25. 18, 4 | 16. 31, 7 | 16. 55, 8 | 28. 13, 7 |
| Lipſiae - - Finis | 20. 59, 8 | 19. 16, 3 | 16. 57, 4 | 26. 28, 0 |
| Miſniae - - Finis | 20. 37, 4 | 20. 39, 6 | 16. 57, 5 | 25. 24, 0 |
| Heracleae Calpe Gibaltar. Initium | 44. 48, 4 | 24. 22, 8 | 16. 49, 4 | 21. 39, 0 |
| - - - - - Finis | 43. 11, 6 | 26. 29, 4 | 16. 52, 9 | 19. 6, 7 |
| Hawkhill - - Finis | 23. 38, 6 | 13. 16, 3 | 16. 55, 2 | 29. 53, 4 |
| Ingolſtadii - - Finis | 24. 2, 8 | 22. 9, 4 | 16. 57, 4 | 24. 6, 1 |
| Kirknewton - Finis | 23. 42, 1 | 13. 10, 6 | 16. 55, 2 | 29. 45, 8 |
| Leiceſtriae - Initium | 31. 15, 7 | 15. 16, 4 | 16. 51, 6 | 28. 51, 0 |
| - - - - - Finis | 26. 10, 8 | 16. 1, 6 | 16. 55, 5 | 28. 30, 8 |
| Mediolani - - Finis | 28. 34, 5 | 24. 8, 0 | 16. 56, 9 | 22. 6, 7 |
| Wanhalinna Initium | 18. 19, 4 | 16. 11, 9 | 16. 55, 5 | 28. 25, 0 |
| - - - - - Finis | 7. 13, 1 | 14. 31, 7 | 16. 57, 6 | 29. 20, 6 |
| Oxonii - - Initium | 32. 6, 1 | 15. 39, 7 | 16. 51, 4 | 28. 38, 2 |
| - - - - - Finis | 27. 3, 6 | 16. 36, 1 | 16. 55, 4 | 38. 10, 8 |
| St. Huberti - Finis | 28. 40, 2 | 19. 29, 0 | 16. 55, 6 | 26. 16, 4 |
| Schiiburni - Initium | 32. 9, 5 | 15. 47, 2 | 16. 51, 4 | 28. 53, 9 |
| - - - - - Finis | 27. 3, 4 | 16. 44, 2 | 16. 55, 5 | 28. 6, 1 |
| Caſtellum - Initium | 34. 17, 1 | 19. 11, 0 | 16. 52, 3 | 26. 25, 4 |
| Saronis - Finis | 28. 9, 8 | 20. 10, 5 | 16. 56, 1 | 25. 41, 7 |
| Vranieburgi - Finis | 16. 37, 5 | 16. 42, 5 | 16. 57, 1 | 28. 9, 1 |
| Vpſaliae - - Finis | 10. 40, 6 | 14. 21, 6 | 16. 57, 4 | 29. 25, 4 |
| Herbipoli - - Finis | 23. 52, 7 | 20. 56, 5 | 16. 57, 0 | 25. 9, 8 |
| Piſis - - - Finis | 29. 46, 6 | 25. 49, 0 | 16. 56, 9 | 20. 7, 3 |

§. 4. His praemissis ipsas expressiones pro temporibus coniunctionum adferemus, vbi quidem, quia in Tomo XV Commentariorum demonstrauimus esse correctionem Latitudinis $y = -22''$ saltem proxime, posuimus statim $y = -10$, vnde momenta pro temporibus coniunctionum ita habebuntur expressa:

Promont. Lezard ex initio. $20^h.\ 0'.\ 39'' + 1,92\,\delta - 0,91\,y + 1,63\,\pi$

ex fine. $20.\ 0.\ 44 - 1,96\,\delta + 1,01\,y + 0,19\,\pi$

$5 - 3,88\,\delta + 1,92\,y - 1,44\,\pi = 0$

Grenouici - ex initio. $20.\ 21.\ 27 + 1,94\,\delta - 0,96\,y + 1,61\,\pi$

ex fine. $20.\ 21.\ 36 - 1,98\,\delta + 1,04\,y + 0,09\,\pi$

$9 - 3,92\,\delta + 2,00\,y - 1,52\,\pi = 0$

Lutetiae Paris. ex initio. $20.\ 30.\ 42 + 2,04\,\delta - 1,15\,y + 1,76\,\pi$

ex fine. $20.\ 31.\ 0 - 2,11\,\delta + 1,27\,y + 0,03\,\pi$

$18 - 4,15\,\delta + 2,42\,y - 1,73\,\pi = 0$

Bononiae - ex initio. $21.\ 6.\ 54 + 2,49\,\delta - 1,84\,y + 2,12\,\pi$

ex fine. $21.\ 7.\ 14 - 2,70\,\delta + 2,10\,y - 0,28\,\pi$

$20 - 5,19\,\delta + 3,94\,y - 2,40\,\pi = 0$

Caianeburgi - ex initio. $22.\ 12.\ 31 + 1,89\,\delta - 0,86\,y + 0,99\,\pi$

ex fine. $22.\ 12.\ 29 - 1,81\,\delta + 0,66\,y - 0,38\,\pi$

$-2 - 3,70\,\delta + 1,52\,y - 1,37\,\pi = 0$

Petro-

Petropoli - $22^h.22'.47'' + 2,03\,\delta - 1,12\,y + 1,19\,\pi$
ex initio.
$22.22.47 - 1,39\,\delta + 0,93\,y - 0,49\,\pi$
ex fine.
$0 - 3,95\,\delta + 2,05\,y - 1,68\,\pi = 0$

Wardhus - $22.26.22 + 1,80\,\delta - 0,64\,y + 0,69\,\pi$
ex initio.
$22.25.51 - 1,74\,\delta + 0,39\,y - 0,25\,\pi$
ex fine.
$- 31 - 3,54\,\delta + 1,03\,y - 0,94\,\pi = 0$

Umbae - $22.38.24 + 1,87\,\delta - 0,81\,y + 0,84\,\pi$
ex initio.
$22.38.15 - 1,78\,\delta + 0,56\,y - 0,44\,\pi$
ex fine.
$- 9 - 3,65\,\delta + 1,37\,y - 1,28\,\pi = 0$

Gurieff - $23.48.35 + 6,25\,\delta - 6,00\,y + 2,54\,\pi$
ex initio.
$23.49.51 - 3,89\,\delta + 3,50\,y - 1,59\,\pi$
ex fine.
$76 - 10,14\,\delta + 9,50\,y - 4,13\,\pi = 0$

Orenburgi - $24.\ 1.17 + 3,25\,\delta - 2,78\,y + 1,38\,\pi$
ex initio.
$24.\ 2.\ 6 - 2,49\,\delta + 1,83\,y - 1,22\,\pi$
ex fine.
$49 - 5,74\,\delta + 4,61\,y - 2,60\,\pi = 0$

Iakuti - $29.\ 0.\ 9 + 1,82\,\delta - 0,68\,y - 0,45\,\pi$
ex initio.
$29.\ 0.15 - 1,69\,\delta + 0,05\,y - 1,08\,\pi$
ex fine.
$6 - 3,51\,\delta + 0,73\,y - 0,63\,\pi = 0$

| | |
|---|---|
| Cauae - ex initio. | $19^h.51'.57'' + 1,83\,\delta - 0,70\,y + 1,37\,\pi$ |
| Hafniae - ex fine. | $21.\ 11.\ 55 - 1,97\,\delta + 1,02\,y - 0,16\,\pi$ |
| Windobonae - ex fine. | $21.\ 27.\ \ 7 - 2,46\,\delta + 1,79\,y - 0,37\,\pi$ |
| Stockholmiae ex fine. | $21.\ 33.\ 48 - 1,90\,\delta + 0,86\,y - 0,25\,\pi$ |
| Pello - ex fine. | $21.\ 57.\ 43 - 1,77\,\delta + 0,53\,y - 0,29\,\pi$ |
| Kolae - ex fine. | $22.\ 33.\ 29 - 1,75\,\delta + 0,46\,y - 0,39\,\pi$ |
| Ponae - ex fine. | $23.\ \ 5.\ 59 - 1,78\,\delta + 0,54\,y - 0,53\,\pi$ |
| Lundae - ex fine. | $21.\ 14.\ 20 - 1,97\,\delta + 1,02\,y - 0,17\,\pi$ |
| Gryphiswald. ex initio. | $21.\ 14.\ 46 + 2,04\,\delta - 1,13\,y + 1,56\,\pi$ |
| ex fine. | $21.\ 15.\ \ 5 - 2,05\,\delta + 1,16\,y - 0,17\,\pi$ |
| | $18 - 4,09\,\delta + 2,29\,y - 1,73\,\pi = 0$ |
| Tolosatii - ex initio. | $20.\ 27.\ \ 7 + 2,23\,\delta - 1,46\,y + 2,03\,\pi$ |
| ex fine. | $20.\ 27.\ 25 - 2,40\,\delta + 1,71\,y - 0,00\,\pi$ |
| | $18 - 4,63\,\delta + 3,17\,y - 2,03\,\pi = 0$ |
| Burdegalae - ex initio. | $20.\ 19.\ 10 + 2,13\,\delta - 1,27\,y + 1,93\,\pi$ |
| ex fine | $20.\ 19.\ 19 - 2,30\,\delta + 1,57\,y + 0,05\,\pi$ |
| | $9 - 4,43\,\delta + 2,84\,y - 1,88\,\pi = 0$ |

Austorp

Auftorp - $20^{h}.15'.41'' + 1,88\,\delta - 0,84\,y + 1,49\,\pi$
ex initio.

$20.\ 15.\ 47 - 1,91\,\delta + 0,88\,y + 0,12\,\pi$
ex fine.

$6 - 3,79\,\delta + 1,72\,y - 1,37\,\pi = 0$

Brestiae - $20.\ 3.\ 43 - 2,02\,\delta + 1,12\,y + 0,17\,\pi$
ex fine.

Gadeti - $19.\ 56.\ 32 + 2,35\,\delta - 1,73\,y + 1,92\,\pi$
ex initio.

$19.\ 56.\ 30 - 2,76\,\delta + 2,18\,y + 0,04\,\pi$
ex fine.

Promont. $-\ 2 - 5,11\,\delta + 3,91\,y - 1,88\,\pi = 0$

Cap Nord $22\ 5,11 + 1,78\,\delta - 0,58\,y + 0,68\,\pi$
ex initio.

$22\ 5.\ 18 - 1,71\,\delta + 0,44\,y - 0,33\,\pi$
ex fine.

$7 - 3,49\,\delta + 1,02\,y - 1,01\,\pi = 0$

Hammerfost $21.\ 56.\ 19 - 1,73\,\delta + 0,37\,y - 0,25\,\pi$
ex fine.

Caroli coronae $21.\ 23.\ 50 + 2,00\,\delta - 1,06\,y + 1,43\,\pi$
ex initio.

$21.\ 23.\ 41 - 1,98\,\delta + 1,03\,y - 0,20\,\pi$
ex fine.

$-\ 9 - 3,98\,\delta + 2,09\,y - 1,63\,\pi = 0$

Est Derehami $20.\ 25.\ 27 + 1,92\,\delta - 0,93\,y + 1,56\,\pi$
ex initio.

$20.\ 25.\ 13 - 1,94\,\delta + 0,97\,y + 0,08\,\pi$
ex fine.

$-\ 14 - 3,86\,\delta + 1,90\,y - 1,48\,\pi = 0$

Heracl. Calpe $20.\ 0.\ 32 + 2,54\,\delta - 1,90\,y + 1,93\,\pi$
ex initio.

Calpe

Calpe - $20^h.\ 0'.\ 50'' - 2,87\,\delta + 2,32\,y - 0,01\,\pi$
ex fine.

$18 - 5,41\,\delta + 4,22\,y - 1,94\,\pi = 0$

Lipsiae - $21.\ 11.\ 3 - 2,15\,\delta + 1,33\,y - 0,14\,\pi$
ex fine.

Misniae - $21.\ 14.\ 57 - 2,18\,\delta + 1,37\,y - 0,21\,\pi$
ex fine.

Hawkhill - $20.\ 8.\ 57 - 1,85\,\delta + 0,75\,y + 0,13\,\pi$
ex fine.

Ingolstadii - $21.\ 7.\ 11 - 2,30\,\delta + 1,55\,y - 0,19\,\pi$
ex fine.

Kirknewton $20.\ 7.\ 41 - 1,85\,\delta + 0,75\,y + 0,13\,\pi$
ex fine.

Leicestriae - $20.\ 17.\ 1 + 1,91\,\delta - 0,90\,y + 1,53\,\pi$
ex initio.

$20.\ 17.\ 6 - 1,94\,\delta + 0,95\,y + 0,11\,\pi$
ex fine.

$5 - 3,85\,\delta + 1,85\,y - 1,42\,\pi = 0$

Mediolani - $20.\ 58.\ 27 - 2,50\,\delta + 1,84\,y - 0,19\,\pi$
ex fine.

Wanhalinna $21.\ 51.\ 34 + 1,94\,\delta - 0,96\,y + 1,19\,\pi$
ex initio.

$21.\ 51.\ 22 - 1,88\,\delta + 0,84\,y - 0,33\,\pi$
ex fine.

$-12 - 3,82\,\delta + 1,80\,y - 1,42\,\pi = 0$

Oxonii - $20.\ 16.\ 28 + 1,92\,\delta - 0,92\,y + 1,59\,\pi$
ex initio.

$20.\ 16.\ 39 - 1,96\,\delta + 1,00\,y + 0,12\,\pi$
ex fine.

$11 - 3,88\,\delta + 1,92\,y - 1,47\,\pi = 0$

St. Huberti $20.\ 28.\ 35 - 2,10\,\delta + 1,24\,y + 0,05\,\pi$
ex fine.

Saro

Saron - $20^h.35'.51'' + 2,07\,\delta - 1,20\,y + 1,80\,\pi$
ex initio.
$20.\,36.\,12 - 2,14\,\delta + 1,32\,y + 0,00\,\pi$
ex fine.
$21 - 4,21\,\delta + 2,52\,y - 1,80\,\pi = 0$

Shirburni - $20.\,17.\,39 + 1,92\,\delta - 0,93\,y + 1,58\,\pi$
ex initio.
$20.\,17\,.\,88 - 1,97\,\delta + 1,01\,y + 0,11\,\pi$
ex fine.
$-1 - 3,89\,\delta + 1,94\,y - 1,47\,\pi = 0$

Vranieburgi $21.\,12.\,20 - 1,96\,\delta + 0,99\,y - 0,16\,\pi$
ex fine.

Vpſaliae - $21.\,32.\,\;4 - 1,88\,\delta + 0,82\,y - 0,24\,\pi$
ex fine.

Herbipoli - $21.\,\;1.\,16 - 2,19\,\delta + 1,40\,y - 0,14\,\pi$
ex fine.

Piſis - $21.\,\;3.\,14 - 2,74\,\delta + 2,17\,y - 0,27\,\pi$
ex fine.

Heic vero obſeruare conuenit, quod aequatio pro Pariſiis multum diſcrepans ſit ab illa, quam in Tomo XV Comment. adhibuimus, quia nunc pro initio Eclipſis momentum a Celeb. *Bailly* obſeruatum, ſubſtituimus in locum momenti a Celeb. *Meſſier* aſſignati, quippe quod minus exactum videbatur.

§. 5. Quamuis valores in Tomo XV Commentar. pro $\delta$, $y$, $\pi$ aſſignati, aequationibus plerisque, ſaltem fide maxime dignis, ſatisfaciant, tamen vt errores aequo iure inter obſeruationes Guriefenſes et Orenburgenſes diſtribuentur, exiſtimaui correctionem Latitudinis ſupponi poſſe $-24''$, ita vt ſit pro noſtris expreſſionibus $y = -14$, poſitis vt antea $\delta = -3$ et $\pi = -3$. Patet autem

 his

his substitutis valoribus aequationem pro Lutetia Parisiorum et Grenouico bene impleri, pro quibus locis obseruationes institutae merito fundamenti loco substerni poterunt, vt per comparationem cum illis Longitudines reliquorum locorum explorentur. Caeterum non dubito quin aliquantulum diminutis valoribus ipsorum $\delta$ et $\pi$, etiam paulo minor valor pro $y$ aequationibus satisfaciens inueniri posset; tamen certo persuasus sum, vix hunc valorem vltera bina, vel ad summum tria scrupula secunda, diminui posse. Nec ex immutatis his valoribus ipsorum $\delta$, $y$, $\pi$ insigniores variationes deriuari possunt in determinationem Longitudinum, nisi pro Gurjef, quia, vti iam vidimus, coefficientes ipsorum $\delta$, $y$, $\pi$ pro hoc loco praegrandes sunt. Quicquid vero sit, valores ipsorum $\delta$, $y$, $\pi$ modo recensitos adhibebimus, quorum substitutione facta, momenta pro temporibus coniunctionum ita erunt expressa:

| | Momentum pro tempore coniunct. ☉ et ☽. | | Long. in tempore a Merid. Obseru. Paris. |
|---|---|---|---|
| Lutetiae Parisior. - | $20^h. 30'. 47''$ | (I) | |
| | 20. 30. 49 | (II) | |
| Promont. Lezard - | 20. 0. 41 | (I) | $0^h. 30'. 6''$ Occid. |
| | 20. 0. 39 | (II) | 0. 30. 10 |
| Obseruat. Grenou. - | 20. 21. 29 | (I) | 0. 9. 18 Occid. |
| | 20. 21. 27 | (II) | 0. 9. 22 Occid. |
| Obseruat. Bonon. | 21. 7. 6 | (I) | *0. 36. 19 Orient. |
| | 21. 6. 54 | (II) | 0. 36. 5 |
| Cajaneburgi | 22. 12. 34 | (I) | 0. 41. 47 Orient. |
| | 22. 12. 29 | (II) | 0. 41. 40 |
| Obseruat. Petropolit. | 22. 22. 53 | (I) | 1. 52. 6 Orient. |
| | 22. 22. 41 | (II) | 1. 51. 52 |
| Wardhus. - | 22. 26. 21 | (I) | *1. 55. 44 Orient. |

Ward-

| Momentum pro tempore coniunct. ⊙ et ☽. | | | | | Long. in tempore a Merid. Obser. Paris. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wardhus - | $22^h$. | $25'$. | $53''$ | (II) | $1^h$. | $55'$. | $4''$ | |
| Vmbae - | 22. | 38. | 30 | (I) | *2. | 7. | 43 | Orient. |
| | 22. | 38. | 18 | (II) | 2. | 7. | 29 | |
| Gurjef - | 23. | 49. | 35 | (I) | *3. | 18. | 48 | Orient. |
| | 23. | 49. | 18 | (II) | 3. | 18. | 29 | |
| Orenburgi - | 24. | 1. | 45 | (I) | 3 | 30. | 58 | Orient. |
| | 24. | 1. | 52 | (II) | 3. | 31. | 3 | |
| Iakutsk - | 29. | 0. | 12 | (I) | 8. | 29. | 25 | Orient. |
| | 29. | 0. | 23 | (II) | 8. | 29. | 35 | |
| Cauae - | 19. | 51. | 56 | (I) | 0. | 38. | 51 | Occid. |
| Obseru. Hafniens. | 21. | 11. | 47 | (II) | 0. | 40. | 58 | Orient. |
| Obseru. Windobon. | 21. | 26. | 51 | (II) | 0. | 56. | 2 | Or. |
| Obseru. Stockholm. | 21. | 33. | 42 | (II) | 1. | 2. | 53 | Or. |
| Pello - | 21. | 57 | 44 | (II) | 1. | 26. | 55 | Or. |
| Kolae - | 22. | 33. | 31 | (II) | 2. | 2. | 44 | Or. |
| Ponoi - | 23. | 6. | 0 | (II) | 2. | 35. | 11 | Or. |
| Obseru. Lundens. - | 21. | 14. | 12 | (II) | 0. | 43. | 23 | Or. |
| Obseru. Gryphiswald. | 21. | 14. | 51 | (I) | 0. | 44. | 4 | Or. |
| | 21. | 14. | 55 | (II) | 0. | 44. | 6 | |
| Lipsiae - | 21. | 10. | 51 | (II) | 0. | 40. | 2 | Or. |
| Misniae - | 21. | 14. | 45 | (II) | 0. | 43. | 56 | Or. |
| Tolosatii - | 20. | 27. | 15 | (I) | 0. | 3. | 32 | Occid. |
| | 20. | 27. | 19 | (II) | 0. | 3. | 40 | |
| Burdegalae | 20. | 19. | 16 | (I) | 0. | 11. | 31 | Occ. |
| | 20. | 19. | 4 | (II) | 0. | 11. | 45 | |
| Austorp - | 20. | 15. | 42 | (I) | 0. | 15. | 5 | Occ. |
| | 20. | 15. | 40 | (II) | 0. | 15. | 9 | |
| Brestiae - | 20. | 3. | 44 | (II) | 0. | 27. | 15 | Occ. |
| Obseru. Gadeti - | 19. | 56. | 46 | (I) | *0. | 34. | 1 | Occ. |



Ob-

| | Momentum pro tempore coniunct. ☉ et ☽ | | Longit. in tempore a Merid. Observ. Paris. | |
|---|---|---|---|---|
| Observ. Gadeti - | $19^h. 56'. 9''$ | (II) | $0^h. 34' 40''$. | Occ. |
| Prom. Cap. Nord | 22. 5. 12 | (I) | 1. 34. 23. | Or. |
| | 22. 5. 20 | (II) | 1. 34. 31. | |
| Hammerfost | 21. 56. 22 | (II) | 1. 25. 33 | Or. |
| Caroli coronae | 21. 23. 54 | (I) | *0. 53. 7 | Or. |
| | 21. 23. 33 | (II) | 0. 52. 45 | |
| Est Derehami | 20. 25. 30 | (I) | *0. 5. 17 | Occ. |
| | 20. 25. 5 | (II) | 0. 5. 44 | |
| Heracleae Calpe | 20. 0. 44 | (I) | *0. 30. 3 | Occ. |
| al. Gibaltar | 20. 0. 26 | (II) | 0. 30. 23 | |
| Hawkhill | 20. 8. 54 | (II) | 0. 21. 55 | Occ. |
| Ingolstadii | 21. 6 56 | (II) | 0. 36. 7 | Or. |
| Kirknewton | 20. 7. 38 | (II) | 0. 23. 11 | Occ. |
| Leicestriae | 20. 17. 3 | (I) | 0. 13. 44 | Occ. |
| | 20. 16. 58 | (II) | 0. 13. 51 | Occ. |
| Obseruat. Mediolan. | 20. 58. 9 | (II) | 0. 27. 20 | Or. |
| Wanhalinna | 21. 51. 38 | (I) | *1. 20. 51 | Or. |
| | 21. 51. 16 | (II) | 1. 20. 27 | |
| Obseruat. Oxon. | 20. 16. 30 | (I) | 0. 14. 17 | Occ. |
| | 20. 16. 30 | (II) | 0. 14. 19 | |
| St. Huberti | 20. 28. 24 | (II) | 0. 2. 25 | Occ. |
| Saron - | 20. 35. 56 | (I) | 0. 5. 9 | Or. |
| | 20. 36. 0 | (II) | 0. 5. 11 | |
| Shirburn | 20. 17. 36 | (I) | 0. 13. 11 | Occ. |
| | 20. 17. 29 | (II) | 0. 13. 20 | |
| Uranieburgi | 21. 12. 12 | (II) | 0. 41. 23 | Or. |
| Obseruat. Upsaliense | 21. 31. 59 | (II) | 1. 1. 10 | Or. |
| Herbipoli | 21. 1. 5 | (II) | 0. 30. 16 | Or. |
| Obseruat. Pisan. - | 21. 2. 53 | (II) | 0. 32. 4 | Or. |

vbi

vbi obſeruandum, breuitatis cauſſa momenta coniunctionum ex obſeruationibus pro initio et fine Eclipſis reſpectiue his numeris (I) et (II) indigitari. Caeterum nulla quidem eſt dubitandi anſa, quin haec momenta pro tempore coniunctionis, ſub hypotheſi aſſumtarum correctionum pro $\delta$, $y$, $\pi$ rite ſe habeant, niſi pro obſeruationibus in Gurjef inſtitutis, ſaltem illa pro initio. Adhibitis autem correctionibus pro $\delta$, $y$, $\pi$, ſi pro hoc loco calculus pro tempore coniunctionis repetatur, prodibit iſtud momentum $23^h.49'.30''$, quod quinque ſecundis a ſupra allato differt et melius quidem conſentit cum momento coniunctionis ex fine Eclipſis deducto.

§. 6. Vt concluſiones prius allatae eo magis ſtabiliantur, examinemus quoque, quomodo Longitudines locorum determinentur pro illis locis, vbi initium et finem Eclipſis obſeruare licuit, idque ſi vel maxime nulla habeatur ratio correctionum $\delta$, $y$, $\pi$. Si igitur momenta coniunctionum ex obſeruationibus pro fine et initio Eclipſis coniunctim ſumantur, ſequentes prodibunt expreſſiones:

| | | Longit. a Pariſ. |
|---|---|---|
| Lutetia Pariſ. | $20^h.30'.51'' + 0{,}06y + 0{,}90\pi$ | |
| Grenovic. | $20.51.32 + 0{,}04y + 0{,}85\pi$ | $9'.19''$. Occ. |
| Prom. Lezard. | $20.\ 0.42 + 0{,}05y + 0{,}91\pi$ | 30. 9. Occ. |
| Cajaneburg. | $22.12.30 - 0{,}10y + 0{,}32\pi$ | 41. 43. Or. |
| Petropol. | $22.22.47 - 0{,}10y + 0{,}35\pi$ | $1^h.51.58$. Or. |
| Jakutsk | $29\ \ 0.12 - 0{,}33y - 0{,}76\pi$ | 8. 29. 31. Or. |
| Gryphiswald. | $21.14.55 + 0{,}03y + 0{,}70\pi$ | 0. 44. 5. Or. |
| Toloſat. | $20.27.16 + 0{,}19y + 1{,}00\pi$ | 0. 3. 36. Occ. |
| Auſtorp. | $20.15.44 + 0{,}02y + 0{,}80\pi$ | 0. 15. 7. Occ. |



Cap

| | | |
|---|---|---|
| Cap Nord | $22^h. 5'.14'' - 0.07y + 0,17\pi$ | $1^h.34'.28''$. Or. |
| Leiceft. | $20. 17. 4 + 0,02y + 0,81\pi$ | 13. 47. Occ. |
| Oxon. | $20. 16. 34 + 0,04y + 0,85\pi$ | 14. 17. Occ. |
| Saron. | $20. 36. 2 + 0,06y + 0,90\pi$ | 5. 11. Or. |
| Shirburn | $20. 17. 38 + 0,04y + 0,85\pi$ | 13. 13. Occ. |

In hac autem comparatione illas tautum obferuationes adhibuimus, pro quibus colligere licuit, initium Eclipfis non valde erroneum effe; tumque ad id etiam refpectum habuimus, ne conclufio media, ex initio et fine deducta, infignes coëfficientes ipforum δ, y, π inuolueret, quare hac ratione obferuationes in Gurjef, Orenburg, Bononiae et Gadeti inftitutae cum reliquis non comparari poffent, etiamfi momentum pro initio rite fe haberet. Interim adhibito quodam artificio obtineri poteft, vt ifti coëfficientes δ, y, π faltem qua potiorem partem eliminentur, quod iam exemplo declarabimus. Sumamus igitur medium ex conclufionibus pro Gurjef, quod erit:

$$23^h.49'.13'' + 1,18\delta - 1,25y + 0,47\pi,$$

iam quia habetur pro Gurjef:

$$76 - 10,14\delta + 9,50y - 4,13\pi = 0,$$

fi haec aequatio ducatur in 0, 11, fiet:

$$8,4 - 1,11\delta + 1,04y - 0,45\pi = 0,$$

quae aequatio ad valorem pro tempore coniunctionis addita praebet:

$$23^h.49'.21'' + 0,07\delta - 0,21y + 0,02\pi,$$

vbi quidem iam faltem fine infigni errore coëfficientes ipforum δ, y, π negligi poffunt, hinc vero fiet Longitudo Gurjef a Parifiis $3^h.18'.30''$. Ex obferuationibus Orenburgenfibus fimili ratione colligitur:

$$24^h.1'.42'' + 0,38\delta - 0,47y + 0,08\pi,$$

at

at pro Orenburg habetur aequatio:

$$49 - 5,74\,\delta + 4,61\,y - 2,60\,\pi = 0,$$

cuius decima pars ad expreſſionem modo allatam addita praebet:

$$24^h.\,4'.\,47'' - 0,19\,\delta - 0,01\,y - 0,18\,\pi,$$

vbi iterum coefficientes ipſorum $\delta$, $y$, $\pi$ valde parui ſunt, fietque Longitudo Orenburgenſis $3^h.\,30'.\,56''$. Medium ex concluſionibus pro Bononia eſt:

$$21^h.\,7'.\,4'' - 0,10\,\delta + 0,13\,y + 0,92\,\pi,$$

quod iam immediate cum concluſione Pariſienſi conferri poteſt, vnde reſultabit differentia Meridianorum 36'. 13'', quae certe nimis magna eſt, ob aliquantum errorem, quo obſeruatio initii huius Eclipſeos affecta videtur.

§. 7. Ad vlteriorem confirmationem noſtrarum concluſionum, conducet, vt comparationem inſtituamus expreſſionum pro tempore coniunctionis praecipue ex fine Eclipſis deductarum, in quibus coefficientes ipſorum, $\delta$, $y$, $\pi$ haud multum inter ſe diſcrepantes habentur. Cum expreſſione igitur pro obſeruatorio

Pariſino $20^h.\,31'.\,0'' - 2,11\,\delta + 1,27\,y + 0,03\,\pi$

ſequentes conferantur:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Gryphisw. | 21. | 15. | 5 | $- 2,05\,\delta + 1,16\,y - 0,17\,\pi$ |
| Breſlia | 20. | 3. | 43 | $- 2,02\,\delta + 1,12\,y + 0,17\,\pi$ |
| St. Hubert. | 20. | 28. | 35 | $- 2,10\,\delta + 1,24\,y + 0,05\,\pi$ |
| Saron | 20. | 36. | 12 | $- 2,14\,\delta + 1,32\,y + 0,00\,\pi$ |
| Herbipolis | 21. | 1. | 16 | $- 2,19\,\delta + 1,40\,y - 0,14\,\pi$ |
| Lipſia | 21. | 11. | 3 | $- 2,15\,\delta + 1,33\,y - 0,14\,\pi$ |
| Miſnia | 21. | 14. | 57 | $- 2,18\,\delta + 1,37\,y - 0,21\,\pi$ |

vnde

vnde ſepoſita conſideratione correctionum fiet differentia Meridianorum, inter

| | |
|---|---|
| Pariſ. et Gryphisw. 44′. 5″. Or. | Inter Pariſ. et Saron. 5′. 12″. Or. |
| Breſtiam 27. 17 Oc. | et Herbipol. 30. 16. Or. |
| St. Hubert. 2. 25 Oc. | et Lipſiam 40. 3. Or. |
| | et Miſniam 43. 57. Or. |

Procedamus nunc ad obſeruationem Grenouicenſem et quae cum illa commode comparari poſſunt:

| | | Longitud. a Merid. Gren. |
|---|---|---|
| Grenouic. | $20^h.21'.36'' - 1{,}98\delta + 1{,}04y + 0{,}09\pi$ | |
| Prom. Lez. | $20.\ 0.\ 44 - 1{,}96\delta + 1{,}01y + 0{,}19\pi$ | 20′. 52″ Occ. |
| Petropolis | $22.\ 22.\ 47 - 1{,}93\delta + 0{,}93y - 0{,}49\pi$ | 2^h. 1. 9 Or. |
| Hafnia | $21.\ 11.\ 55 - 1{,}97\delta + 1{,}02y - 0{,}16\pi$ | 50. 19 Or. |
| Lunda | $21.\ 14.\ 20 - 1{,}97\delta + 1{,}02y - 0{,}17\pi$ | 52. 44 Or. |
| Gryphisw. | $21.\ 15.\ 5 - 2{,}05\delta + 1{,}16y - 0{,}17\pi$ | 53. 29 Or. |
| Car. corona | $21.\ 23.\ 41 - 1{,}98\delta + 1{,}03y - 0{,}20\pi$ | 1. 2. 5 Or. |
| Oxonium | $20.\ 16.\ 39 - 1{,}96\delta + 1{,}00y + 0{,}12\pi$ | 4. 57 Occ. |
| Shirburn | $20.\ 17.\ 38 - 1{,}97\delta + 1{,}01y + 0{,}11\pi$ | 3. 58 Or. |
| Uranieb. | $21.\ 12.\ 20 - 1{,}96\delta + 0{,}99y - 0{,}16\pi$ | 50. 44 Or. |
| Eſt Dereh. | $20.\ 25.\ 13 - 1{,}94\delta + 0{,}97y + 0{,}08\pi$ | 3. 37 Or. |
| Leiceſtria | $20.\ 17.\ 6 - 1{,}94\delta + 0{,}95y + 0{,}11\pi$ | 4. 30 Occ. |

vbi ſi ponatur differentia Meridianorum inter obſeruatorium Pariſinum et Grenouicenſe 9′. 20″ Occ. prodibunt Longitudines locorum a Meridiano Pariſino computatae, haud multum diſcrepantes ab illis, quas ſupra attulimus. Videamus nunc quoque de obſeruationibus, quae cum Stockholmienſi comparari poſſunt:

| | | Long. a Merid. Stockholm. |
|---|---|---|
| Pro Stockholmia | $21^h.33'.48''-1,90\delta+0,86\gamma-0,25\pi$ | |
| Auftorp | $20.\ 15.\ 47\ -1,91\delta+0,88\gamma+0,12\pi$ | $1^h.18'.\ 1''$.Occ. |
| Eft Dereham | $20.\ 25.\ 13\ -1,94\delta+0,97\gamma+0,08\pi$ | 1. 8. 35. Occ. |
| Hawkhill | $20.\ 8.\ 57\ -1,85\delta+0,75\gamma+0,13\pi$ | 1. 24. 51. Occ. |
| Kirknewton | $20.\ 7.\ 41\ -1,85\delta+0,75\gamma+0,13\pi$ | 1. 26. 7. Occ. |
| Leicestria | $20.\ 17.\ 6\ -1,94\delta+0,95\gamma+0,11\pi$ | 1. 16. 42. Occ. |
| Wankalinna | $21.\ 51.\ 22\ -1,88\delta+0,84\gamma-0,33\pi$ | 17. 34. Or. |
| Upfalia | $21.\ 32.\ 4\ -1,88\delta+0,82\gamma-0,24\pi$ | 1. 44. Occ. |

vnde fi ftatuatur Longitudo obferuatorii Stockholmienfis a Parifino $1^h.\ 2'.\ 55''$, orientur Longitudines a Meridiano Parifino pro locis modo commemoratis, quae a fupra §. 5. adductis vix tantillum different. Quia Longitudo loci pro Pello in Lapponia tam per Eclipfin Solis 1764, quam varias Satellitum Eclipfes fatis bene habetur determinata, iam quoque obferuationes in Lapponia inftitutas cum ifta in Pello facta, comparare licebit:

| | | Long. a Merid. pro Pello. |
|---|---|---|
| Pro Pello | $21^h.57'.43''-1,77\delta+0,53\gamma-0,29\pi$ | |
| Caianeburg | $22.\ 12.\ 29\ -1,81\delta+0,66\gamma-0,38\pi$ | $14'.46''$. Or. |
| Wardhus | $22.\ 25.\ 51\ -1,74\delta+0,39\gamma-0,25\pi$ | 28. 8. Or. |
| Umba | $22.\ 38.\ 15\ -1,78\delta+0,56\gamma-0,44\pi$ | 40. 32. Or. |
| Kola | $22.\ 33.\ 29\ -1,75\delta+0,46\gamma-0\ 39\pi$ | 35. 46. Or. |
| Ponoi | $23.\ 5.\ 59\ -1,78\delta+0,54\gamma-0,53\pi$ | $1^h$. 8. 16. Or. |
| Cap Nord | $22.\ 5.\ 18\ -1,71\delta+0,44\gamma-0,33\pi$ | 7. 35. Or. |
| Hammerfoft | $21.\ 56.\ 19\ -1,73\delta+0,37\gamma-0,25\pi$ | 1. 24. Oc. |

 Tran-

Transſeamus autem nunc quoque ad obſeruationes, quae cum Windobonenſi comparari poſſunt:

| | | Long. a Merid. Windobon. |
|---|---|---|
| Pro Windobona | $21^h.27'.\ 7''-2,46\delta+1,79\gamma-0,33\pi$ | |
| Orenburg | $24.\ 2.\ 6-2,49\delta+1,83\gamma-1,22\pi$ | $2^h.34'.59''$. Or. |
| Toloſatio | $20.\ 17.\ 25-2,40\delta+1,71\gamma-0,00\pi$ | 1. 9. 42. Oc. |
| Burdegala | $20.\ 19.\ 19-2,30\delta+1,57\gamma+0,05\pi$ | 1. 7. 48. Oc. |
| Ingolſtadio | $21.\ 7.\ 11-2,30\delta+1,55\gamma-0,19\pi$ | 0. 19. 56. Oc. |
| Mediolano | $20.\ 58.\ 27-2,50\delta+1,84\gamma-0,19\pi$ | 0. 28. 40. Oc. |

vbi ſi ſtatuatur Longitudo Meridiani Windobonenſis a Pariſienſi 56′. 10″, prodirent differentiae Meridianorum a ſupra §. 5. allatis non multum diuerſae, niſi ſuſpicari liceret, finem huius Eclipſis iuſto citius Windobonae fuiſſe obſeruatum. Denique comparationem inſtituamus obſeruationis Bononiae circa finem Eclipſis inſtitutae, cum illis, quae ipſi ſunt correſpondentes:

| | | Long. a Merid. Bononienſi. |
|---|---|---|
| Pro Bononia | $21^h.\ 7'.14''-2,70\delta+2,10\gamma-0,25\pi$ | |
| Gadete | $19.\ 56\ 29-2,76\delta+2,18\gamma+0,04\pi$ | $1^h.10'.45''$. Occ. |
| HeracleaCalpe | $20.\ 0.\ 50-2,87\delta+2,32\gamma-0,01\pi$ | 1. 6. 24. Occ. |
| Piſis | $21.\ 3.\ 14-2,74\delta+2,17\gamma-0,27\pi$ | 4. 0. Occ. |

vbi obſeruare conuenit differentiam Meridianorum inter obſeruatoria Pariſinum et Bononienſe per varias obſeruationes inuentam eſſe 36′. 6″. Haec modo allata ſi bene perpendantur, facile confidimus, vnumquemque harum

re-

rerum aequum iudicem nobis largiturum, quod dubium istud, quo Celebris quidam Astronomus vsum Eclipsium Solarium, ad determinandas Longitudines locorum, infringere voluit, non eius esse momenti, ac ipse sibi persuaserat. Existimat enim has obseruationes pro fine commemorato, eo minori cum fructu adhiberi posse, quod conclusiones per calculos erutae, insignes variationes subire queant, propter correctiones, quibus Elementa calculi, vtpote Longitudo et Latitudo Lunae, Parallaxis et Diameter Lunae adfectae esse possunt. Verum praeterquam quod nonnullis saltem in casibus principalem harum correctionum, Latitudinis nimirum Lunae, exacte determinare liceat, etiamsi quoque hae correctiones plane manerent incognitae, tamen incidunt casus, quibus per comparationem conclusionum, in quibus correctiones $\delta$, $y$, $\pi$ neque fere magnis coefficientibus adficiuntur, differentiae Meridianorum independenter ab his correctionibus determinari possunt. Caeterum si nonnunquam continget, vt conclusiones a diuersis Eclipsibus elicitae aliquantum inter se discrepent, perpendendum est, has obseruationes pro quantitatibus praecisione Geometrica definitis non esse habendas, quippe quum experientia comprobatum sit, eodem loco circa definiendum momentum pro fine Eclipsis, discrepantias inter obseruatores reperiri 10 et 12 secundorum. Verum si maiores discrepantiae in conclusionibus, vtpote 20 vel 30 scrupulorum secundorum reperiantur, tum certo contendere licet, in vna vel altera obseruatione insigniorem quendam latere errorem.

§. 8. Quum pleraeque harum obſeruationum a Cel. *Du Sejour* computatae ſint, qui etiam ſuas concluſiones iam dudum publici iuris fecit, haud praeter rem erit, vt de illis noſtrarum concluſionum, quae a concluſionibus Cel. *Du Séjour* iuſto magis differunt, dilucide exponamus; non quidem quod noſtris calculis maiorem fidem vindicare velimus, ſed vt ſaltem rationes explicemus, cur cum Cel. hoc Mathematico conſentire nobis non liceat. De obſeruatione quidem Guriefwenſi nihil adferre attinet, quippe quum inſignis diſcrepantia hic reſultare poteſt, prouti alii valores pro correctionibus $\delta$, $y$, $\pi$ adhibeantur, interim pro noſtra concluſione militat, quod per eam obſeruationes Guriefwenſes minus reddantur erroneae, ac ſecundum calculum D^ni *Du Séjour*. Pro obſeruatione Gaditana inter meam et D^ni *Du Séjour* concluſionem diſcrepantia adeſt $15''$; iam etiamſi concedere vellem, correctiones $\delta$, $y$, $\pi$ ita definiri poſſe, vt concluſio prodeat $15''$ a mea diuerſa, tamen non video quomodo tum obſeruationes Bononienſes et Gaditanae inter ſe conciliari queant. Erit enim differentia Meridianorum ex obſeruato fine $1^h.\ 10'.\ 45'' + 0,06\,\delta - 0,08\,y - 0,29.\ \pi$, vnde ſi Longitudo pro Bononia ſupponatur $36.\ 10''$, erit Longitudo pro Gadete $34'.\ 35''$; nequaquam autem $34'.\ 25''$, vti perhibet D^nus *Du Séjour*. De meo autem calculo pro obſeruatione Gaditana ſatis perſuaſus mihi ſum, quum eam pluribus vicibus examini ſubiecerim. Adhuc minus perſpicere licet, quomodo Cel. *Du Séjour* ad ſuas concluſiones pro Heraclea peruenerit, quippe quum illa pro fine a mea concluſione adeo $32''$ differat. Caeterum obſeruare conuenit, quod Cl. D^nus *Mechain* ex obſeruato fine Heracleae inuenerit Longitudinem huius loci $30'.\ 13''$,

quae

quae multo propius cum mea conclusione consentit. In nullis autem conclusionibus maius est discrimen, quam pro illis, quae obseruationibus St. Huberti et Saxonis institutis, respondent; nec alia mihi explicatio huius discrepantiae probabilis videtur, quam quod Cel. *Du Séjour* alia forsan momenta adhibuerit, quam quae in Commentariis Academ. Scientiar. Parisinae pro Anno 1769, vel in Dissertatione Cel. *de la Lande* (Mémoire sur le Passage de Venus) continentur; quod si vero iisdem vsus est, tum sine vlla haesitatione pronunciare ausim, pro his saltem obseruationibus calculos D$^{ni}$ *Du Séjour* rite sibi constare non posse. Praeterea nec ea quidem conclusio prorsus exacta mihi videtur, qua Cel. *Du Séjour* affirmat, ex initio Eclipsis Glasgowii obseruato, sequi huius loci Longitudinem 26'. 27''; nam si, vti in Transactionibus Societatis Londin. perhibetur, initium Eclipsis ibidem obseruatum sit 18$^h$. 30'. 14'', hinc sequeretur Longitudo pro Glasgow, ista proposita saltem quinque minutis primis minor; nec aliud argumentum ad hoc comprobandum adducere opus est, quam quod perhibeatur, in Kirknewton initium Eclipsis quoque 18$^h$. 30'. 19'' esse obseruatum, quum tamen inter hunc locum et Glasgow adsit in Longitudine differentia 3 Minutor. cum dimidio; et quia momentum allatum pro Kirknewton nimis tarde sit assignatum, id tanto magis de obseruatione Glasgowiensi valebit. Caeterum quod ad Longitudines locorum, quae in vicinia obseruatoriorum Londinensis et Parisiensis sita sunt, attinet, eas speciali calculo determinare superfluum existimaui, quia in tanta vicinia, differentia momentorum obseruatorum, saltem intra vnum vel alterum scrupulum secundum, differentiam Meridianorum exprimet. Heic autem sponte li-

quet, infignes difcrepantias oriri, prouti vnum vel alterum momentum pro initio vel fine obferuato adhibeatur. Si pro obferuatorio Grenouicenfi adhibeantur momenta a Cel. *Mafkelyne* affignata, pro initio $18^h. 38'. 54''$ et pro fine $20^b. 23'. 30''$, non concipere poffum, quomodo ex illis, comparatis cum obferuationibus Cel. *Canton*, pro initio $18^b. 38'. 51''$ et pro fine $20^b. 23'. 18''$, deduci queat Longitudo loci vbi D^nus^ *Canton* obferuauerat $7''$ vel $17''$. Oc.

§. 9. Inter reliquas determinationes fupra allatas quum praecipue commemorabilis fit illa pro Longitudine Vranieburgenfi, quippe quum hic fit celebris locus, vbi infignis Aftronomus *Tycho Brahe* fuas faceret obferuationes; nonnulla adferemus momenta pro hac Longitudine vlterius confirmanda. Primum igitur obferuo, ex obferuato fine Eclipfis Anno 1764 deduci Longitudinem pro Lunda Scanorum a Meridiano Parifino $43'. 30''$, ita vt fi medium fumatur ex hac conclufione et illa, quam §. 5 attulimus, ftatui queat Longitudo Lundenfis $47'. 26''$. Porro ex menfuris, quibus Cel. *Schenmark* diftantias inter Lundam, Vranieburgum et Hafniam determinauit, conftat Hafniam Vranieburgo $29''$ occidentaliorem effe, Lundam vero ab Vranieburgo $1'. 59''$ verfus orientem effe fitam, quod cum determinationibus noftris §. 5 allatis bene confentit, nam ex illis eft differentia Meridianorum inter Vranieburgum atque Lundam $2'$. Hincque iam certiffime affirmare licebit, determinationem pro Longitudine Vranieburgenfi a Cel. *Picard* allatam faltem 40 fcrupulis fecundis a veritate aberre; nec paucae illae obferuationes, circa Eclipfes Satellitum Iouis a *Picard* inftitutae, conclufiones noftras multo tutiores infringere valebunt.

De

## De Eclipſi Solis Anno 1773 obſeruata.

**Conferatur Nov. Comment. Tom. XVIII pag. 571.**

§. 10. Hic iterum, vti pro Eclipſi Solis Anni 1769 obſeruata, elementa calculi praemittere conueniet:

| Phaenom. obſeru. | Paral. Longit. | Latit. ☽ apparens. | Semid. ☽ apparens. | Different. Long. app. |
|---|---|---|---|---|
| Windobon. - Finis | 16′.36″,2 | 9′.47″,4 | 14′.56″,3 | 29′.22″,8 |
| Schwezingae - Finis | 16. 13, 3 | 10. 32, 8 | 14. 55, 0 | 29. 5, 6 |
| Lutet. Pariſ. - Finis | 16. 48, 4 | 10. 26, 9 | 14. 53, 7 | 29. 6, 4 |
| Piſis - - Finis | 21. 17, 0 | 8. 18, 4 | 14. 54, 8 | 29. 48, 2 |
| Montis Peſſulani Finis | 21. 28, 2 | 8. 33, 6 | 14. 53, 9 | 29. 43, 2 |
| Petropoli - - Finis | 2. 15, 6 | 11. 49, 7 | 14. 58, 1 | 28. 39, 2 |
| Dmitriewſk Initium | 15. 4, 9 | 4. 56, 1 | 14. 55, 8 | 30. 33, 9 |
| Pekin - - Initium | 23. 50, 0 | 16. 7, 7 | 15. 4, 5 | 23. 50, 0 |
| - - - Finis | 44. 43, 2 | 18. 5, 1 | 15, 0, 5 | 25. 13, 5 |

vnde ſequentes valores pro tempore coniunctionis prodeunt:

pro Windobona (II) $18^h.26'.22'' - 2{,}29\,\delta - 0{,}72\,y + 1{,}33\,\pi$
Schwezinga (II) $17.\ 55.\ 11 - 2{,}30\,\delta - 0{,}76\,y + 1{,}38\,\pi$
Piſis - - (II) $18.\ 2.\ 34 - 2{,}25\,\delta - 0{,}61\,y + 1{,}41\,\pi$
Petropoli (II) $19.\ 22.\ 9 - 2{,}35\,\delta - 0{,}90\,y + 0{,}94\,\pi$
Dmitriewſk (I) $20.\ 22.\ 40 + 2{,}19\,\delta + 0{,}35\,y + 0{,}26\,\pi$
Pekin - (I) $25.\ 6.\ 32 + 2{,}54\,\delta - 1{,}32\,y - 0{,}31\,\pi$
(II) $25.\ 6.\ 21 - 2{,}67\,\delta + 1{,}56\,y - 2{,}29\,\pi$

§. 11. Nunc quidem pro vera differentia Meridianorum elicienda principale negotium eo rediret, vt valores

lores correctionum $\delta$, $y$, $\pi$ elicerentur; verum huic fini non nisi vnica suppetit obseruatio Pekinensis ex qua obtinetur haec aequatio:

$$11 + 5,21\,\delta - 2,88\,y + 1,98\,\pi = 0$$

vbi quidem si ponatur $\delta = -2$, fieret $y = 0$, et si pro $\delta$ valor aliquanto maior adhibeatur, vtpote $-3$, fieret valor ipsius $y$ adeo negatiuus, quod quidem minime consentire videtur cum mensuris Micrometro obiectiuo captis, quippe ex quibus concludendi ansam habui, Latitudinis correctionem fuisse positiuam et vix minorem 10 scrupulis secundis. At quum nullo criterio dignosci queat, vtrum error sit in obseruatione Pekinensi pro initio Eclipseos, seu in nostra mensura distantiae minimae, lateat; iam considerationem correctionum $\delta$, $y$, $\pi$ eo tutius seponere licebit, quod qualiscunque fuerit correctio $y$, eam tamen quam minimam esse, necesse sit.

§. 12. Comparatis igitur obseruationibus Schwezingae et Pisis institutis, cum Petropolitana et Windobonensi, fiet differentia Meridianorum inter Petropolin et Schwezingam $1^h. 26'. 58''$, atque inter Petropolin et Pisas $1^h. 19'. 35''$; similiter inter obseruatorium Windobonense et Schwezingense erit differentia Meridianorum $31'. 11''$ et inter obseruatorium Windobonense atque Pisanum $23'. 48$. Hinc si Longitudo Petropolis supponatur a Meridiano Parisino $1^h. 51'. 57''$ et Windobonae $56'. 10''$, erit Longitudo obseruatorii Schwezingensis $24'. 59''$ a Parisino, et Longitudo obseruatorii Pisani $32'. 22''$, vtraque orientalis. Praeterea si obseruatio in Dmitriewsk pro initio Eclipsis conferatur cum obseruatione Pekinensi, fiet differentia Meridianorum inter Dmitriewsk et Pekinum $4^h. 43'. 52''$,

hinc-

hincque ſi Longitudo pro Pekin ſupponatur a Meridiano Pariſino $7^{h}. 36'. 20''$, erit Longitudo Dmitriewſk ab eodem Meridiano $2^{h}. 52'. 28''$.

§. 13. Supra ex obſeruatione Eclipſis Solis, Anno 1769 Piſis inſtituta, inuenimus Longitudinem huius loci $32'. 4''$, ab obſeruatorio Pariſino, quae a modo allata nimis diſcrepare videtur. Cuinam autem harum concluſionum potior debeatur fides, id quidem diſcerni non poteſt; ſufficit autem nobis, quod per has obſeruationes innotuerit, Longitudinem obſeruatorii Piſani ſaltem $32'$ eſſe maiorem, adeoque determinationem Longitudinis, ex obſeruatis Eclipſibus Satellitum Iouis deriuatam, qua haec Longitudo ſtatuitur $31'. 28''$, multum a veritate abludere. Praeterea hoc loco obſeruari quoque meretur, quod ſi medium ex determinationibus pro Pekin, quod eſt:

$$25^{h}. 6'. 26'' - 0,06\,\delta + 0,12\,y - 1,00\,\pi$$

conferatur cum determinatione media pro Petropoli, Tom. XVIII Comment. pag. 595 allata:

$$19^{h}. 22'. 5'' - 0,02\,\delta + 0,05\,y + 0,16\,\pi,$$

reperietur differentia Meridianorum Pekinenſis et Petropolitani: $5^{h}. 44'. 21'' + 0,17\,y - 1,16\,\pi$; vbi ſi correctiones $y$, $\pi$ plane negligantur, fiet Longitudo pro Pekin a Meridiano Pariſino $7^{h}. 36'. 18''$, quae egregie conſentit cum determinatione ex variis aliis obſeruationibus concluſa.

§. 14. Obſeruationis Pariſinae hac occaſione non eo fine fecimus mentionem, vt inde concluſiones quasdam deducere vellemus, quippe quum, ipſis fatentibus obſeruatoribus, haec obſeruatio valde ſit dubia, ob Solem va-

poribus horizontis tempore obſeruationis plane immerſum; interim tamen, hac difficultate non obſtante, vix maior quam 26″ ſcrupulorum ſecundorum error obſeruationi Pariſinae ineſſe poteſt; adhibita enim obſeruatione Cel. *Mesſier* fiet tempus coniunctionis pro Meridiano Pariſino 17$^h$. 29′. 46″, quod cum momentis pro Petropoli et Windobona collatum, oſtendit, errorem obſeruationis Pariſienſis vix 26″ excedere poſſe. Cum obſeruatione autem, quae Montis Peſſulani inſtituta perhibetur, longe alia eſt ratio, nam ex hac obſeruatione ſequeretur, finem Eclipſis integris quatuor minutis tardius hoc loco fuiſſe viſum, quam ex calculo ſequi deberet. Nam ſi Finis Eclipſis in hoc loco Tempore vero 17$^h$. 59′. 1″, obſeruatus fuiſſet, vti affirmatur in Commentariis Acad. Scient. Pariſienſis pro Anno 1774 Pag. 693, inde ſequeretur pro Monte Peſſulano tempus coniunctionis fuiſſe 17$^h$. 41′. 7″, ideoque differentia Meridiani huius loci a Petropoli 1$^h$. 41′. 2″, hinc a Meridiano Pariſino 10′. 55″, quae fere quinque Minutis primis nimis magna eſt. Ne autem dici poſſet, meis calculis aliquem forſan errorem irrepſiſſe, eosdem primum pro momento allato variis rationibus repetere operae pretium duxi, tumque inſuper ſi momento huic 4 Minutorum primorum correctio adplicetur, inueni momentum coniunctionis 17$^h$. 36′. 58″, reliquis Elementis calculi pro hoc momento vti ſequitur inuentis:

Parallax. Longit. 21′. 26″,5; Latit. ☽ appar. 8′. 23″,9
Diam. ☽ appar. 14. 53. 8; Diff. Long. ☉ et ☽ app. 29′. 45″,8.

Primum quidem exiſtimaueram per errorem quendam hoc momentum ſecus eſſe aſſignatum, ac obſeruatio id praebuerat, verum haec rem explicandi ratio non ſuccedit; quod

quod D^nus^ *Poitevin* affirmauerit, ipſum calculum oſtendere, quod finis Eclipſis verſus 17$^h$. 59$'$ finiri deberet; id quod tamen nunquam demonſtratione firmare poterit. Nec diſcrepantia calculi ab obſeruatione effectui refractionis adſcribi poterit, quippe quum tum Pariſiis quoque phaenomenon aeque ſingulare ſe ſpectandum praebuiſſet. Quare nihil aliud remanet, quam vt Aſtronomi Montis Peſſulani, fallacia calculi inducti, inciſuram quandam limbi Solaris, ex vndulatione ortam, pro indicio Eclipſeos habuerint.

## De occultatione Aldebaran a Luna Anno 1773, die 1 Nov. Conferat. Tom. XVIII Comment. pag. 610.

§. 15. Pro obſeruationibus huius occultationis, quae mihi innotuerunt, Elementa calculi habentur ſequentia.

| Phaenom. obſeru. | | Paral. Longit. | Latit. ☽ apparens. | Diam. ☽ apparens. | Diff. app. in Long. |
|---|---|---|---|---|---|
| Gadeti - | Immerſio | 37′.34″,1 | 5°.15′.30″,0A | 14′.48″,5 | 6′.26″,5 |
| | Emerſio | 36. 51, 5 | 5. 14. 38, 5 | 14. 49, 4 | 4. 27, 8 |
| Grenouici | Immerſio | 25. 11, 8 | 5. 22. 37, 7 | 14. 50, 0 | 13. 33, 0 |
| | Emerſio | 21. 46, 5 | 5. 20. 52, 2 | 14. 51, 9 | 12. 37, 8 |
| Bruxellis | Immerſio | 24. 41, 9 | 5. 21. 23, 5 | 14. 50, 7 | 12. 55, 3 |
| Florentiae | Immerſio | 27. 19, 0 | 5. 15. 28, 5 | 14. 52, 2 | 6. 36, 4 |
| Gryphiswald. | Immerſ. | 19. 2, 2 | 5. 21. 8, 7 | 14. 52, 0 | 12. 48, 1 |
| | Emerſio | 13. 49, 4 | 5. 19. 37, 5 | 14. 53, 5 | 11. 46, 9 |
| Petropoli | Emerſio | 0. 32, 7 | 5. 20. 31, 2 | 14. 54, 0 | 12. 26, 6 |

Hinc pro temporibus coniunctionum ſequentes prodeunt expreſſiones:

| | | |
|---|---|---|
| pro Gadete - | $10^h.\ 7'.\ 33'' + 4{,}65\delta + 4{,}19y + 4{,}12\pi$ | (I) |
| | $10.\ 5.\ 2 - 6{,}85\delta - 6{,}54y - 2{,}65\pi$ | (II) |
| | $2.\ 31 + 11{,}50\delta + 10{,}73y + 6{,}77\pi = 0$ | |
| pro Grenouico - | $10.\ 31.\ 58 + 2{,}24\delta + 0{,}93y + 1{,}82\pi$ | (I) |
| | $10.\ 31.\ 32 - 2{,}40\delta - 1{,}28y - 0{,}10\pi$ | (II) |
| | $26 + 4{,}64\delta + 2{,}21y + 1{,}92\pi = 0$ | |
| Bruxellis - | $19.\ 49.\ 22 + 2{,}35\delta + 1{,}17y + 1{,}96\pi$ | (I) |
| Florentia - | $11.\ 16.\ 45 + 4{,}58\delta + 4{,}10y + 2{,}88\pi$ | (II) |
| Gryphiswaldia | $11.\ 25.\ 47 + 2{,}35\delta + 1{,}18y + 1{,}59\pi$ | (I) |
| | $11.\ 25.\ 8 - 2{,}58\delta - 1{,}59y - 0{,}59\pi$ | (II) |
| | $39 + 4{,}93\delta + 2{,}77y + 2{,}18\pi = 0$ | |
| Petropoli - | $12.\ 32.\ 41 - 2{,}45\delta - 1{,}36y - 0{,}93\pi$ | (II) |

§. 16. Si obseruationes Grenouicenses sumantur pro termino comparationis, obseruationes Bruxellis, Gryphiswaldiae et Petropoli institutae cum illis facile comparari possunt, etiamsi correctiones $\delta$, $y$, $\pi$ plane non habeantur determinatae; verum obseruationes Gaditanae et illa Florentiae instituta minime cum Grenouicensibus comparari possunt, sine cognitione correctionum $\delta$, $y$, $\pi$, quippe quum earum coefficientes pro his obseruationibus sint praegrandes. Facile autem patet ex aequatione pro Gadete inuenta:

$$151 + 11{,}50\delta - 10{,}73y + 6{,}77\pi = 0$$

Latitudinis correctionem proxime statui posse $-10''$, vnde vt aequationes paullo exactiores obtineremus, statim huius correctionis vsum adhibuimus, sicque momenta pro temporibus coniunctionum sequentia elicuimus:

pro

| | | |
|---|---|---|
| pro Gadete - | (I) | $10^h. 6'.48'' + 4{,}90\delta + 4{,}46y + 4{,}29\pi$ |
| | (II) | $10. 6.13 - 7{,}90\delta - 7{,}63y - 2{,}85\pi$ |
| | | $35 + 12{,}80\delta + 12{,}09y + 7{,}14\pi = 0$ |
| Grenouico | (I) | $10. 31.49 + 2{,}24\delta + 0{,}93y + 1{,}82\pi$ |
| | (II) | $10. 31.45 - 2{,}40\delta - 1{,}28y - 0{,}10\pi$ |
| | | $4 + 4{,}64\delta + 2{,}21y + 1{,}92\pi = 0$ |
| Gryphiswald. | (I) | $11. 25.35 + 2{,}35\delta + 1{,}18y + 1{,}59\pi$ |
| | (II) | $11. 25.24 - 2{,}58\delta - 1{,}59y - 0{,}59\pi$ |
| | | $9 + 4{,}93\delta + 2{,}77y + 2{,}18\pi = 0$ |
| Bruxellis - | (I) | $10. 49.11 + 2{,}35\delta + 1{,}17y + 1{,}96\pi$ |
| Florentia - | (I) | $11. 16. 2 + 4{,}83\delta + 4{,}38y + 3{,}02\pi$ |
| Petropoli - | (II) | $12. 32.55 - 2{,}45\delta - 1{,}36y - 0{,}93\pi$ |

§. 17. Nunc quidem si pro obseruatione Gaditana implenda, ponatur $\delta = -2$, $y = -1$ et $\pi = 0$, obseruationibus Gryphiswaldensibus cum praecisione 3 scrupulorum secundorum satisfiet, nec Grenouicensibus maior quam 7 secundor. error inducetur, qui quidem eo minus probabilitate destituitur, quod ipso Cel. *Maskelyne* fatente, emersio aliquantum dubia fuerit. His igitur adhibitis correctionibus, sequentes prodibunt determinationes pro momentis coniunctionum et pro differentia Meridianorum

| | | | Differentia a Meridiano Grenovicensi |
|---|---|---|---|
| pro Grenouico | (I) | $10^h. 31'. 44''$ | |
| | (II) | 10. 31. 51 | |
| Gadete - | (I) | 10. 6. 34 | - - $25'. 10''$ Occ. |
| | (II) | 10. 6. 36 | - - 25. 15 Occ. |
| Gryphiswald. | (I) | 11. 25. 29 | - - 53. 45 Orient. |
| | (II) | 11. 25. 31 | - - 53. 40 Orient. |

| | | | | Differentia a Meridiano Grenouicensi |
|---|---|---|---|---|
| Bruxellis | - | (I) | $10^h. 49'. 5''$ | - - $17'. 21''$ Orient. |
| Florentia | - | (I) | 11. 15. 48 | - - 44. 4 Orient. |
| Petropoli | | (II) | 12. 33. 1 | - - $1^s$. 1. 10 Orient. |

Hinc fiunt Longitudines a Meridiano Parisino, differentia Longitudinum inter Meridianum Parisinum et Grenouicensem supposita $9'. 20''$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| pro Gadete | (I) | $34'. 30''$ Occ. | Bruxellis | (I) | $8'. 1''$ Or. |
| | (II) | 34. 35 | Florentia | (I) | 34. 44 Or. |
| Gryphisw. | (I) | 44. 25 Or. | Petropoli | (II) | $1^h.51.50$ Or. |
| | (II) | 44. 20 | | | |

Vbi quidem, si correctio pro emersione Grenouicensi 5 scrupulis secundis supponatur dubia, Longitudines ex hac obseruatione deductae, tantundem erunt augendae. Supra ex obseruatione Eclipsis Solis Anno 1769 Gryphiswaldiae instituta elicuimus Longitudinem huius loci $44'. 4''$ vel $5''$, quae a iam inuenta $20''$ differt: Nostrum autem non est disquirere, quaenam conclusio potiori loco sit habenda, nisi quod posterior propius accedat ad determinationem Longitudinis pro hoc loco ex Eclipsibus Satellitum Iouis, quae tamen, quum supponi soleat $45'. 10''$, certe nimis est magna, vnde nouo argumento comprobatur, quam parum in hoc negotio his Eclipsibus sit tribuendum.

§. 18. Nunc etiam multo exactius correctiones Tabularum definire licet, quam id a nobis praestitum est in Tomo XVIII Commentariorum. Incidet enim Tempus coniunctionis Lunae cum $\alpha$ Tauri in tempus Parisinum verum $10^h. 41'. 5''$, ideoque medium $10^h. 24'. 52''$, existen-
et

te tunc Longitudine Lunae $2^s. 6^\circ. 38'. 3'',9$, cum Tabulae *Mayeri* pro hoc momento dent Longitudinem Lunae $2^s. 6^\circ. 38'. 38'',7$, vnde prodibit correctio, pro Longitudine Lunae $35''$ circiter, additiua, Latitudinis correctione $11''$ subtractiua existente; vbi tamen supponitur locum Stellae exacte esse definitum. Conclusio igitur pro loco Lunae ex his calculis deducta eo reducitur, vt contigerit.

## Coniunctio Palilicii cum Luna

Anno 1773 die 1 Nou. $10^h. 24'. 52''$ Temp. Paris. medio
existe Longitudine Lunae $2^s. 6^\circ. 38'. 3'',9$
et Latitudine Lunae Austr. $4. 41. 58,6$

§. 19. Correctio semidiametri Lunae $\delta$ quum a nobis supposita sit $-2''$, merito hoc loco disquiri potest, an quae a variis Auctoribus fortior huius diametri statuatur diminutio, vtpote 4 secundorum cum dimidio, saltem pro hac obseruatione admitti queat? Quodsi igitur pro aequatione Gaditana §. 16 supponeretur $\delta = -4$, fieret $y = +1$; tum vero in aequationem Grenouicensem deriuaretur error $13''$ et in Gryphiswaldensem error $9''$. Nec quidem maior consensus, saltem pro obseruatione Grenouicensi prodire poterit, si ipsi $\pi$ aliqualis tribuatur valor siue positiuus seu negatiuus, quem tamen sponte intelligitur inter quinque scrupula secunda concludi debere.

§. 20. Praeter obseruationes supra commemoratas, in Commentariis Acad. Scientiarum Parisinae pro Anno 1774, recensentur huius occultationis obseruationes factae Montis Pessulani, vbi perhibetur, occultationem contigisse

tigiſſe tempore vero $9^h. 16'. 34''$ et emerſionem $10^h. 6'. 20''$; verum computo facto ex priori horum momentorum, elicitur Tempus coniunctionis $10^h. 39'. 34''$, quod octo fere minutis primis erroneum eſt, nec momentum coniunctionis ex obſeruato fine elicitum $10^h. 47'. 16''$ rite ſibi habere poteſt. Suſpicio igitur mihi oborta eſt, quod in priori horum momentorum adeſſe poſſet error integrorum decem Minut. primorum, in poſteriori vero error vnius Minuti primi, ita vt momenta obſeruata ſtatui deberent $9^h. 26', 34''$ et $10^h. 5'. 20''$, ex quibus ſequentes prodirent expreſſiones pro tempore coniunctionis:

$$10^h.\ 47'.\ 38'' + 3,16\,\delta + 2,42\,y + 2,79\,\pi$$
$$10.\ 46.\ 18 - 4,06\,\delta - 3,51\,y - 0,62\,\pi$$
$$80 + 7,22\,\delta + 5,93\,y + 3,41\,\pi$$

aequationi autem reſultanti, poſito $\delta = -2$ et $y = -11$, optime ſatisfit. Momenta autem vera pro coniunctione erant: $10^h. 47'. 5''$, ex vtraque obſeruatione, vnde fieret Longitudo Montis Peſſulani a Meridiano Grenouicenſi $15'. 21''$, vel $15'. 14''$, vbi tamen poſterior determinatio quinque ſecundorum correctionem admittere poterit. Quicquid autem ſit, hanc hypotheſin, vtcunque probabilem, propoſuiſſe ſuffecerit, donec ipſi Auctores huius obſeruationis declarauerint, quid de iſta explicandi ratione ſit cenſendum.

## De occultatione Aldebaran a Luna

### Anno 1774 d. 14 Aprilis. Conferet. Tom. XIX Comment. pag. 592.

§. 21. Pro obſeruationibus calculo ſubiectis Elementa inuenta ſunt ſequentia:

Phae-

| Phaenom. obseru. | Paral. Longit. | Latit. ☽ apparens. | Diam. ☽ apparens. | Different. Lon. app. |
|---|---|---|---|---|
| Massiliae Imersio | 38'. 51'',9 | 5°. 25'. 5'',4 | 14'. 56'',9 | 14'. 32'',4 |
| Emersio | 43. 32, 0 | 5. 28. 10, 2 | 14. 54, 2 | 14. 57. 4 |
| Gadeti Emersio | 42. 43, 1 | 5. 20. 26, 3 | 14. 54, 4 | 12. 23, 1 |

Hinc sequentes pro tempore coniunctionis eliciuntur expressiones:

Massiliae (I) $5^h. 59'. 30'' + 2,08\,\delta + 0,52\,y - 1,21\,\pi$

(II) $5.\ 59.\ 9 - 2,02\,\delta - 0,09\,y - 1,56\,\pi$

$21 + 4,10\,\delta + 0,61\,y + 0,35\,\pi = 0$

Gadeti (II) $5^h.\ 12.\ 19 - 2,44\,\delta - 1,37\,y - 2,04\,\pi$

Hinc primum quidem liquet, pro aequatione ex obseruationibus Massiliensibus deducta, valores correctionum $\delta$ et $y$ in Tomo XIX. Comment. stabilitos, adprime satisfacere; nam si ponatur $\delta = -13$, $y = -14$, haec aequatio perfecte implebitur, eritque momentum coniunctionis pro Massilia: $5^h. 59'. 46''$; vnde quum pro Meridiano obseruatorii Parisiensis momentum coniunctionis $5^h. 47'. 13''$ inueneramus, erit differentia Meridianorum inter obseruatorium Parisiense et Massiliam, 12'. 4''. Pro obseruatione vero Gaditana, si valores commemorati substituantur, erit momentum coniunctionis: $5^h. 12'. 45''$, vnde fiet differentia Meridianorum inter Gadetem et obseruatorium Parisinum 34'. 27'', quae cum supra §. 20 inuentis bene consentit. Idem vero proxime inuenietur, si obseruatio Cel. *Messier* pro emersione comparetur cum illa Gadeti facta: erit enim

pro Gadeto moment. conj. $5^h. 12^l. 19^{ll} - 2,44\delta - 1,87y - 2,04\pi$
pro obseruat. Parisino $5. 47. 11 - 2,05\delta + 0,39y - 1,24\pi$
hinc differentia Meridian. $34. 52 + 0,39\delta + 1,76y + 0,80\pi$,
quae positis $\delta = -3$, $y = -14$, $\pi = 0$, abit in $34^l. 26^{ll}$.

Praeter commemoratas obseruationes innotuit quoque mihi de emersione huius Stellae Bruxellis obseruata; verum quum ex hac obseruatione Longitudo huius loci prodeat valde erronea, suspicor momentum, quod ex Transactionibus Societatis Londinensis excerpsi, esse erroneum; idque eo magis, quod Cl. *Mechain* affirmauerit, se ex hac obseruatione inuenisse Longitudinem pro Bruxellis $8^l. 13^{ll}$, seu satis bene sibi constantem.

## De occultatione γ Tauri a Luna, die 24 Sept. 1774.
Conferat. Tom. XIX Comment. pag. 599.

§ 22. Elementa calculi pro obseruatione Gadeti instituta sequentia habentur: Pro immersione: Paral. Long. $23^l. 59^{ll},1$; Latit. ☽ appar. $5°. 35^l. 24^{ll},1$; Diam. ☽ appar. $15^l. 6^{ll}6$; Differentia Longitud. apparens $11^l. 30^{ll},7$. Pro emersione: Paral. Longit. $13^l. 17^{ll},0$; Latit. ☽ apparens $5°. 33^l. 35^{ll},2$; Diamet. ☽ apparens $15^l. 13^{ll},3$; Differ. apparens Longitud. $9^l. 49^{ll},5$. Hinc sequentes colliguntur expressiones pro tempore coniunctionis:

$$\text{(I)}\ 14^h. 35^l. 1^{ll} + 2,60\delta + 1,69y + 1,63\pi$$
$$\text{(II)}\ 14. 34. 7 - 3,07\delta - 2,36y - 0,54\pi$$
$$54 + 5,67\delta + 4,15y + 2,17\pi = 0$$

Pro Parisiis erat:

$$\text{(I)}\ 15. 9. 9 + 2,00\delta + 0,28y + 0,47\pi$$
$$\text{(II)}\ 15. 8. 54 - 2,07\delta - 0,64y - 0,46\pi$$
$$15 + 4,07\delta + 0,92y + 0,93\pi = 0$$

Hinc

Heic si ponatur $\delta = -2$, $y = -11$, $\pi = 0$, vtrique obseruationi satis bene satisfit. Tum vero erit pro Gadete:

| | | Diff. Meridian. |
|---|---|---|
| Momentum coniunctionis | 14h. 34'. 37'' (I) | |
| | 14. 34. 39 (II) | |
| et pro obseruat. Parisino. | 15. 9. 0 (I) . . | 34'. 23'' |
| | 15. 9. 3 (II) . . | 34. 24 |

In caeteris pro hac occultatione conclusionibus, vt aliquid immutetur, necesse non est.

## De occultatione Palilicii a Luna, die 18 Nou. 1774.

### Conferat. Tom. XIX Comment. pag. 600.

§. 23. Pro Emersione Palilicii, Grenouici obseruata, sequentia habentur Elementa calculi: Paral. Longit. 34'. 25''; Latit. ☽ apparens 5°. 30'. 39'',6; Diamet. ☽ apparens 15'. 4'',7; Differentia Longitudinum apparens 15'. 1'',8. Hinc colligitur tempus coniunctionis pro Grenouico:

$$14^h. 57'. 33'' - 1,99\,\delta + 0,22\,y - 1,36\,\pi.$$

Pro Immersione, Gadeti obseruata, Elementa calculi sunt: Paral. Longit. 30'. 24'',6; Lat. ☽ apparens 5°. 16'. 30'',5; Diamet. ☽ appar. 15'. 8'',1; Differentia Longit. apparens 7'. 31'',4, hinc tempus coniunctionis:

$$14^h. 32'. 39'' + 3,40\,\delta + 2,78\,y - 1,92\,\pi.$$

Pro eruendis valoribus correctionum aliud heic non suppetit remedium, quam quod conclusio ex Emersione Grenouici deducta reducatur ad Meridianum Parisinum, et cum conclusione ex immersione Parisiis obseruata confe-

ratur. Est igitur pro Meridiano Parisino, ex obseruatione Grenonicensi, momentum coniunctionis:

$$15^h.\ 6'.\ 53'' - 1,99\ \delta + 0,21\ y - 1,36\ \pi,$$

ex obseruatione autem Cel. *Messier*, pro immersione, idem conclusum est

$$15.\ 6.\ 27 + 1,98\ \delta + 0,19\ y - 1,00\ \pi,$$

vnde colligeretur aequatio

$$26 - 3,97\ \delta + 0,02\ y - 0,36\ \pi = 0,$$

quae sane subsistere nequit, quum valorem omnino positiuum eumque valde insignem pro $\delta$ praebeat, omnibus hucusque obseruationibus refragantibus. Eo potiori igitur iure contendimus, hanc Cel. *Messier* obseruationem rite sibi constare non posse, quod Cel. *Monnier* eandem immersionem $15^h.\ 35'.\ 32''$ obseruauerit, ideoque 25 secundis tardius, quam Cel. *Messier*, habita ratione differentiae Meridianorum inter obseruatoria Celeberrimorum horum Astronomorum. Si igitur vsus fiat obseruationis a Celeb. *Monnier* institutae, prodibit aequatio

$$1 - 3,97\ \delta + 0,02\ y - 0,36\ \pi = 0,$$

quae quidem nec prorsus exacta videtur, interim tamen non adeo grauia absurda perducit, ac prior illa. Et si supponamus emersionem Grenouici iusto tardius esse obseruatam, vtpote sex vel septem secundis, haec aequatio absurdi nil inuoluet. Caeterum nec ex hac postrema aequatione de valore ipsius $y$ quidquam concludi potest; igitur pro hac correctione saltem proxime inuenienda, reducamus conclusiones, ex obseruatione Petropolitana et Gaditana deductas, ad Meridianum Parisinum, sicque habebimus has expressiones pro tempore coniunctionis:

$15^h. 7'. 7'' + 3,40\,\delta + 2,78\,y - 1,93\,\pi,$
$15. 6. 51 + 2,53\,\delta - 1,59\,y + 0,09\,\pi,$ hinc
$16 + 0,87\,\delta + 4,37\,y - 2,02\,\pi = 0,$

vbi, si ponatur

$\delta = -2, \pi = 0,$ fiet $y = -3'',3.$ Tumque habebimus momenta coniunctionum

| | | Differ. Meridian. |
|---|---|---|
| pro Grenouico ex Emersione | $14^h. 57'. 36''$ | |
| pro Gadete ex Immers. | 14. 32. 23 | - 25'. 13'' Oc. |
| Petropoli ex Immers. | 16. 58. 48 | - 2. 1. 12 Or. |

obseruatio vero Cel. *Monnier* dabit tempus coniunctionis, $15^h. 6'. 47''$. Hinc inter Gadetem et obseruatorium Parisinum differentia Meridianorum erit $34'. 24''$, inter obseruatoria autem Petropolitanum et Parisinum $1^h. 52'. 1''$, quae certe aliquot secundis iusto maior est. Quae autem heic attulimus tantum hypothetice vera sunt, si correctiones $\delta$, $y$ rite a nobis fuerint definitae, de quo occasio forsan dabitur vlterius disquirendi, dum plures huius occultationis obseruationes nobis innotuerint.

§. 24. Antequam hic Dissertationi finem imponamus, nonnullas animaduersiones circa rationem determinandi Longitudines locorum ex obseruationibus circa Eclipses Solis et occultationes fixarum a Luna adiiciemus. Primum igitur ex speciminibus iam allatis, vti et multis aliis calculis pro hoc instituto factis, satis patere arbitror, vix vllam dari rationem certiorem, determinandi Longitudines locorum, quam hanc, et si quae incertitudo conclusionibus ex illa deductis nonnunquam adhaerere videtur, illam qua potiorem partem ex defectu obseruatio-

 num

num esse deriuandam. Si conclusiones pro Longitudine obseruatorii Gaditani supra allatas inter se conferamus, vix maiorem consensum exspectare licebit; est enim:

| Different. Meridianorum inter Obseru. Parisin. et Gaditan. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ex Eclipsi Solis 1769. - - - - - | $0^h$. | $34'$. | $40''$ Oc. | |
| Ex Occultatione Palilicii 1773 d. 1 Nou. | 0. | 34. | 30 | (I) |
| | 0. | 34. | 35 | (II) |
| Ex Occultatione Palilicii 1774 d. 14 Apr. | 0. | 34. | 26 | (II) |
| Ex Occultat. γ Tauri 1774 die 24 Sept. | $0^h$. | $34'$. | 23 | (I) |
| | 0. | 34. | 24 | (II) |
| Ex Occultat. Palilicii 1775 d. 18 Nou. | 0. | 34. | 24 | (I) |

Hinc medio inter septem has determinationes sumto: $34'$. $29''$ Occid., quod tamen medium forsan correctionem duorum, aut trium secundorum diminutiuam, admittere poterit. Quod autem conclusio ex Eclipsi Solis deducta a reliquis plus iusto discrepet, id quidem nemini mirum esse poterit, qui nouerit, inter momenta, pro fine Eclipsis Solis in eodem loco, adducta, nonnunquam discrepantias 15 scrupulorum secundorum reperiri, pro diuersa oculorum et instrumentorum vi. Caeterum tam pro his obseruationibus, quam illis, quae circa occultationes fixarum a Luna instituuntur, errores, in determinando tempore vero commissi, ipsas obseruationes erroneas reddunt; huiusmodi autem errores committi posse, et saepe commissos esse pluribus exemplis confirmari potest. Vnicum autem hanc in rem exemplum sufficere poterit:

1774 d. 14 April. Immersio α Tauri ad Meridian. obseruat. Parisini reducta, ex obseruatione

Cel.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cel. | *Messier* | $6^h$. | $26'$. | $2''$ |
| Cel. | *Cassini* | 6. | 26. | 2 |
| Cel. | *Anthelmi* | 6. | 26. | 2 |
| Cel. | *Mechain* | 6. | 25. | 52. |

Haec exacte consentiunt, excepta obseruatione D. *Mechain*. Eodem die Emersio α Tauri ad Merid. obseruat. Parisini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ex obseruatione D. | *Messier* | $7^h$. | $35'$. | $57''$ |
| | *Cassini* | 7. | 35. | 58 |
| | *Anthelmi* | 7. | 36. | 1 |
| | *Mechain* | 7. | 36. | 1 |
| | *Du Séjour* | 7. | 35. | 55 |
| | *Le Monnier* | 7. | 36. | 11. |

§. 25. Inter alia dubia, quae contra Methodum determinandi Longitudines locorum ex obseruationibus huius generis, proponi potest, etiam illud est, quod de Diametris Solis et Lunae probabile sit, eas siue per inflexionem radiorum luminis, siue per quandam irradiationem diminui, quare nullae certae conclusiones exspectari possunt, antequam haec diminutio exacte definiatur. Huic incommodo remedium vt adferatur, quidam Mathematici hanc diminutionem determinare annisi sunt, inter quos praecipue mihi nominandi sunt Cel. *Du Séjour* et Cel. *de La Lande*, quorum prior contendit inflexionem radiorum luminis ad marginem Lunae esse 4 secund. cum dimidio, posterior autem perhibet pro explicandis phaenomenis transitus Veneris, diametrum Solis 7'' esse diminuendam. Verum etiamsi non negauerim, tam pro Eclipsibus Solaribus, quam occultationibus fixarum, diametrum Lunae diminutionem quandam pati, tamen plerisque in casibus haec dimi-

mi-

minutio vix 3 scrupula secunda excedit, ideoque mensura a Cel. *Du Séjour* stabilita iusto maior videtur. Quod autem diminutionem diametri Solaris a Celeb. *de la Lande* stabilitam attinet, argumentis exceptione maioribus demonstrare valeo, eandem nequaquam locum habere posse. Tanto magis igitur falsum est, quod contendit Abbas Reggio in Ephemeridibus Astronomicis pro Anno 1776 Mediolani euulgatis, diametrum tam Solis quam Lunae 6″ esse diminuendam, quod exemplo Eclipsis Solaris, Anno 1769 obseruatae, comprobare conatur. Si enim in aequationibus nostris, supra §. 4. allatis, praecipue Gurjefwensi ponatur $\delta = -6$, quia ex aequatione Parisina esse deberet $y = -20''$, posito $\pi = -3$, in istam aequationem Gurjefwensem error deriuaretur circiter 41″, quem absurdum esse facile quiuis largietur. Ponamus autem esse $\pi = 0$, fietque per aequationem Parisinam $y = -18''$, et in aequatione Gurjefwensi erit error 34″. Porro si etiam ipsi $\pi$ tribuatur valor positiuus 3″, vt sit $y$ ex aequatione Parisina $= -16''$, et in aequatione Gurjefwensi adhuc remanebit error 28″. Hinc igitur euidentia, vt puto Geometrica, demonstratum est, istam correctionem 6 vel 7 secundorum, pro semidiametris Solis et Lunae omni destitui fundamento. Idem vero insuper patet ex obseruatione Jakutensi, in quam error saltem 12″ ex his valoribus deriuaretur. Caeterum differentia Meridianorum inter Mediolanum et Lutetias Parisiorum habetur:

$$27'.\ 27'' - 0,39\,\delta + 0,57.\,y - 0,22\,\pi$$

vbi ob exiguos coefficientes ipsorum $\delta$, $y$, facile eiusmodi valor pro $y$ seligi potest, vt prodeat differentia Meridianorum, 27′. 25″, quo tamen nihil demonstratur pro exactitudine correctionis $\delta$.

§. 26.

§. 26. Vltimo autem loco obſeruaſſe iuuat, fieri vtique poſſe, vt haec correctio $\delta$ pro variis locis diuerſa ſit; nam in his disquiſitionibus ſupponi ſolet, imagines Solis et Lunae circularem habere figuram, quod tamen, ſaltem pro imagine Solis, aliquantum a veritate abludere, per menſuras Micrometro obiectiuo inſtitutas, ſe inueniſſe nonnulli Aſtronomi contendunt; nec veriſimilitudine deſtituitur, idem pro Luna obtinere. Quare ſi obſeruationes inter ſe conferantur, pro quibus Latitudines Lunae apparentes diſcrepantiam inter ſe inſignem habeant, tum vtique fieri poteſt, vt phaenomenon circa valde diuerſa imaginis Solaris et Lunaris puncta obſeruetur, vnde diametrorum aeſtimatio pro vtroque loco non eſſe poteſt eadem. Quum vero huius diſcrepantiae rationem in calculo vix a ne vix quidem habere liceat, ſaltem quousque experimentis exactiſſimis non fuerit definitum, ſecundum quam rationem diametri Solis vel Lunae variationem patiantur; conſueta Methodo haec Phaenomena computo ſubiicere praeſtabit, ſaltem ſi licuerit earum praecipue obſeruationum comparationem inſtituere, pro quibus Latitudo Lunae apparens non inſigni variatione afficiatur, ita vt phaenomenon ad puncta haud multum inter ſe diſtantia limbi Lunae contigerit.

---

P
B
A
α
β
O
Fig. 2.
Fig. 1.
C
C
D
D
d
e
L
Fig. 5.
v
B
F
A

C
D
Fig. 6.
K
F
E
G
B

Fig. 2.
A
Fig. 3.
C
A
α
V
O
A
Fig. 6.
x
y
B
r
Fig. 4.
A O B
M V N
C P D
A
Fig. 9. P
q
x
y
B
Fig. 8.
f
x
e
F
y
f
R

Fig. 2.
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
120
240
400
Fig. 3.
P
Fig. 4.
z
A
X
Y
B
P
Fig. 5.
a
q
Q
A
X
Y
B

A
m
M
o
O
n
N
Fig. 2
o'
O'
m'
M'
o'
O'
n'
N'
A
M
Fig. 3.
G
N
E
O'
F

a
A
E
e
O
G
C
c
Fig. 5.
g
B

A
Fig. 7.
T
U
P
t
u
X
Q
Y
x
y

Fig. 2.
C
a
b
A
B
P
B
Fig. 4.
C
c
B
b
D
r
A
M
p
a
q
P
Q
3
B
f
g
β
C
B
C
Fig. 6.
p
A
D
r
q
s
C
c
B
b
D
d
Fig. 8.
E
A
a
M
P
Q
R
M
Fig. 10.
Y
T
A
X
O
J

A

Fig. 2.

B

Fig. 1.

Fig. 2.

Act. Acad. Sc. Petrop. Tom. II. P. I. Tab. IX.

h
g
g
g
i
i
r
r
s
s
c
c
d
d
f
b
b

Fig. 4.

Fig. 2.

Fig. 1.

Fig. 3.